PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

112.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur les intégrales multiples.*

C. R., t. XI, p. 1008 (21 décembre 1840).

Parmi les méthodes qui peuvent être employées à la détermination des intégrales simples ou multiples, l'une des plus fécondes est celle que j'ai appliquée à la détermination et à la transformation des intégrales simples dans la première Partie d'un Mémoire présenté à l'Institut le 2 janvier 1815. Cette méthode consiste à remplacer, dans une intégrale donnée, relative à certaines variables $x, y, z, \ldots$, un facteur de la fonction sous le signe $\int$ par une intégrale définie, choisie de manière qu'après ce remplacement les intégrations relatives aux variables $x, y, z, \ldots$ puissent être facilement effectuées. On doit surtout remarquer le cas où l'un des facteurs de la fonction sous le signe $\int$ est une puissance négative d'une autre fonction. Souvent alors, pour rendre exécutables les intégrations relatives à $x, y, z, \ldots$, il suffit de remplacer les puissances négatives dont il s'agit par une intégrale eulérienne de première espèce. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Considérons une intégrale multiple 8 de la forme

$$\mathcal{S} = \int\int\int\cdots\frac{P}{Q^s}\,dx\,dy\,dz\ldots, \tag{1}$$

P, Q étant des fonctions réelles ou imaginaires des variables x, y, z, ... et s une constante positive, ou même une constante imaginaire dont la partie réelle soit positive. Désignons d'ailleurs par $\Gamma(s)$, avec M. Legendre, l'intégrale eulérienne de première espèce

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Si la fonction Q, ou du moins sa partie réelle, reste toujours positive entre les limites des intégrations relatives aux variables x, y, z, ..., on aura

$$\frac{1}{Q^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-Qt}\,dt,$$

et, par suite,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\int\int\cdots\int_0^\infty t^{s-1}\,P\,e^{-Qt}\ldots dx\,dy\,dz\ldots dt. \tag{2}$$

Concevons maintenant que, $P_{\prime}$ et $Q_{\prime}$ étant des fonctions de la seule variable x, $P_{\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime}$ des fonctions de la seule variable y, $P_{\prime\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime\prime}$ des fonctions de la seule variable z, ..., on ait

$$P = P_{\prime}P_{\prime\prime}P_{\prime\prime\prime}\ldots \quad \text{et} \quad Q = Q_{\prime} + Q_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime} + \ldots. \tag{3}$$

Alors, en posant, pour abréger,

$$U = \int P_{\prime}e^{-Q_{\prime}t}\,dx, \qquad V = \int P_{\prime\prime}e^{-Q_{\prime\prime}t}\,dy, \qquad W = \int P_{\prime\prime\prime}e^{-Q_{\prime\prime\prime}t}\,dz, \qquad \ldots,$$

on tirera de la formule (2)

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\,UVW\ldots dt. \tag{4}$$

Donc alors, si l'on peut obtenir en termes finis les valeurs de U, V, W, ... considérés comme fonctions de t, la détermination de l'intégrale multiple s se trouvera réduite à la détermination de l'intégrale simple

$$\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{UVW}\ldots dt.$$

Si l'on supposait la fonction Q liée aux fonctions

$$Q_{\prime},\quad Q_{\prime\prime},\quad Q_{\prime\prime\prime},\quad \ldots,$$

non plus par la seconde des équations (3), mais par la suivante

$$(5)\qquad Q = 1 + Q_{\prime} + Q_{\prime\prime} + Q_{\prime\prime\prime} + \ldots,$$

alors, au lieu de la formule (4), on obtiendrait celle-ci

$$(6)\qquad s = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{UVW}\ldots e^{-t}\,dt.$$

Première application. — Supposons

$$\mathrm{P} = x^l y^m z^n \ldots e^{ax} e^{by} e^{cz}\ldots \qquad \text{et} \qquad Q = 1 + \alpha x + 6y + \gamma z \ldots,$$

$l, m, n, \ldots$ désignant des nombres entiers, et $a, b, c, \ldots, \alpha, 6, \gamma, \ldots$ des constantes réelles ou imaginaires; en sorte qu'on ait

$$(7)\qquad s = \int\int\int\ldots\frac{x^l y^m z^n \ldots e^{ax} e^{by} e^{cz}\ldots}{(1+\alpha x + 6y + \gamma z + \ldots)^s}\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, les intégrations relatives aux variables $x, y, z, \ldots$ effectuées par rapport à x, à partir d'une certaine origine $x = \xi$; par rapport à y, à partir de l'origine $y = \eta$; par rapport à z, à partir de l'origine $z = \zeta, \ldots$. Enfin, concevons que, dans le second membre de la formule (7), la fonction

$$1 + \alpha x + 6y + \gamma z + \ldots$$

offre toujours une partie réelle positive; ce qui arrivera, par exemple, si, les deux limites de chaque intégration étant des quantités positives, chacune des constantes $\alpha, 6, \gamma, \ldots$ acquiert, ou une valeur positive, ou une valeur imaginaire dont la partie réelle soit positive. On trouvera

$$\mathrm{U} = \mathrm{D}_a^l \int_\xi^x e^{(a-\alpha t)x}\,dx = \mathrm{D}_a^l\,\frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a-\alpha t}, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$(8)\qquad \mathcal{S} = \frac{1}{\Gamma(s)}\,\mathrm{D}_a^l\,\mathrm{D}_b^m\,\mathrm{D}_c^n\ldots\int_0^\infty \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a-\alpha t}\,\frac{e^{(b-6t)y} - e^{(b-6t)\eta}}{b-6t}\ldots t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

On se trouve ainsi amené à cette conclusion remarquable, que la fonction $\mathcal{S}$ de $x, y, z, \ldots$, représentée, en vertu de la formule (7), par une intégrale multiple, peut être réduite à une intégrale définie simple relative à une nouvelle variable t, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux premières variables $x, y, z, \ldots$ ou à leurs origines $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, pourvu que la somme

$$1 + \alpha x + 6y + \gamma z + \ldots,$$

ou du moins sa partie réelle, reste positive entre les limites des intégrations.

Si, en attribuant aux constantes $a, b, c, \ldots$ des valeurs négatives ou du moins des valeurs dont la partie réelle fût négative, on supposait chaque intégration effectuée, dans la formule (7), entre les limites 0, ∞, on trouverait

$$\mathrm{U} = \mathrm{D}_a^l \int_0^\infty e^{(a-\alpha t)x}\,dx = \mathrm{D}_a^l\,\frac{1}{\alpha t - a} = \frac{\Gamma(l+1)}{(\alpha t - a)^{l+1}}, \qquad \ldots,$$

et, par suite,

$$(9)\qquad \mathcal{S} = \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)\ldots}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}\,dt}{(\alpha t - a)^{l+1}(6t-b)^{m+1}(\gamma t - c)^{n+1}\ldots}.$$

Enfin, si dans les formules (7) et (9) on remplace $l, m, n, \ldots$ par $l-1, m-1, n-1, \ldots$, et $a, b, c, \ldots$ par $-a, -b, -c, \ldots$, elles donneront

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}\ldots}{(1+\alpha x + 6y + \gamma z + \ldots)^s}\,dx\,dy\,dz\ldots \\ &\quad = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}\,dt}{(a+\alpha t)^l\,(b+6t)^m\,(c+\gamma t)^n\ldots}\ldots\end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule subsistera toujours, d'après ce qu'on vient de dire, quand, $l, m, n, \ldots$ étant des nombres entiers, $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désigneront des constantes positives ou même des constantes imaginaires dont les parties réelles seront positives. Ce n'est pas tout : on verra dans un instant que la formule (10) peut être étendue à des cas où les exposants $l, m, n, \ldots$ ne représentent plus des nombres entiers.

Deuxième application. — Supposons, dans l'équation (1),

$$P = x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots e^{-ax} e^{-by} e^{-cz} \ldots \qquad \text{et} \qquad Q = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots,$$

$l, m, n, \ldots$ désignant des constantes positives ou même des constantes imaginaires dont les parties réelles soient positives; et prenons d'ailleurs pour limites des intégrations relatives à chacune des variables x, y, z, ... les deux quantités

$$0, \quad \infty,$$

en sorte que l'on ait

$$(11) \qquad \mathcal{S} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots e^{-ax} e^{-by} e^{-cz} \ldots}{(1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)^s} \, dx \, dy \, dz \ldots.$$

On trouvera

$$U = \int_0^\infty x^{l-1} e^{-(a+\alpha t)x} \, dx = \frac{\Gamma(l)}{(a + \alpha t)^l}, \qquad \ldots;$$

et, par suite, on tirera de la formule (6)

$$(12) \qquad \mathcal{S} = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(s)} \int_0^t \frac{t^{s-1} e^{-t} \, dt}{(a + \alpha t)^l (b + \beta t)^m (c + \gamma t)^n \ldots}.$$

Donc la formule (10) subsistera certainement, pour des valeurs réelles ou imaginaires des constantes

$$l, \quad m, \quad n, \quad \ldots, \qquad a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \qquad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

toutes les fois que ces constantes ou leurs parties réelles seront positives.

Corollaire I. — Si, dans la formule (10), on réduit les variables x, y,

z, ... à une seule, et si l'on pose, de plus, $a = 1$, on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{x^{l-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^s}dx = \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{(1+\alpha t)^l}dt.$$

Donc, en écrivant r au lieu de l, et x au lieu de t, on aura

$$(13)\qquad \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \frac{x^{r-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^s}dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^r}dx.$$

Cette dernière formule, qui devient identique, dans le cas où l'on prend $s = r$, est précisément l'une de celles auxquelles j'étais parvenu par la méthode ci-dessus exposée dans le Mémoire du 2 janvier 1815. On pourrait de cette formule en déduire plusieurs autres dignes de remarque, en différentiant les deux membres une ou plusieurs fois de suite par rapport à r. Les nouvelles intégrales, comprises dans les formules ainsi obtenues, seraient les dérivées relatives à r des intégrales comprises dans la formule (13); et, pour passer des unes aux autres, il suffirait de multiplier une ou plusieurs fois de suite la fonction sous le signe $\int$ par $\mathrm{l}(x)$ ou par $-\mathrm{l}(1+\alpha x)$, la lettre caractéristique l indiquant un logarithme népérien.

La formule (13), et celles que l'on en déduira par des différentiations relatives à r, subsisteront certainement toutes les fois que les constantes r, s offriront des valeurs positives, ou des valeurs imaginaires dont les parties réelles seront positives.

Corollaire II. — Si, dans la formule (10), on réduit à zéro les constantes $a, b, c, \ldots$, elle donnera

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\cdots}{(1+\alpha x+6y+\gamma z+\ldots)^s}dx\,dy\,dz\ldots\\ &\quad= \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots\Gamma(s-l-m-n-\ldots)}{\Gamma(s)}\,\frac{1}{\alpha^l 6^m\gamma^n\ldots}.\end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation subsistera certainement lorsque

$$s,\quad l,\quad m,\quad n,\quad \ldots,\quad \alpha,\quad 6,\quad \gamma,\quad \ldots$$

seront, ou des constantes positives, ou des constantes imaginaires dont la partie réelle sera positive, et que la partie positive de la constante s surpassera la partie positive de chacune des constantes l, m, n, ... Si, pour fixer les idées, on prend

$$\alpha = 6 = \gamma = \ldots = 1,$$

on trouvera

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots}{(1+x+y+z+\ldots)^s} \, dx \, dy \, dz \ldots \\ &\quad = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots\Gamma(s-l-m-n-\ldots)}{\Gamma(s)}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (15) est l'une de celles auxquelles est arrivé M. Binet dans son Mémoire sur les intégrales eulériennes. Cette même équation, de laquelle on déduit aisément la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{(1+x+y^\mu+z^\nu+\ldots)},$$

ne diffère pas au fond d'une formule que j'avais obtenue dans le temps de mes premières recherches sur les intégrales définies. Je la retrouve sous diverses formes, non seulement dans un cahier de cette époque, mais aussi dans l'un de ceux sur lesquels j'écrivais les Leçons que j'ai données au Collège de France. J'étais parvenu à transformer l'intégrale multiple qu'elle renferme en un produit d'intégrales eulériennes de seconde espèce, c'est-à-dire de la forme

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^s},$$

en remarquant, par exemple, qu'il suffit de poser successivement

$$z = (1+x+y)w \qquad \text{et} \qquad y = (1+x)v,$$

pour établir l'équation

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz}{(1+x+y+z)^s} \\ &\quad = \int_0^\infty \frac{w^{n-1}\,dw}{(1+w)^s} \int_0^\infty \frac{v^{m-1}\,dv}{(1+v)^{s-n}} \int_0^\infty \frac{x^{l-1}\,dx}{(1+x)^{s-m-n}}; \end{aligned} \right.$$

et cette remarque m'avait fait d'abord espérer qu'on pourrait tirer de la formule (15) des relations nouvelles entre les deux espèces d'intégrales eulériennes. Mais cette espérance ne s'est pas réalisée. J'ai pu seulement, en partant de la formule (15), arriver à des relations que l'on sait exister entre les intégrales eulériennes de première et de seconde espèce. Ainsi, en particulier, si l'on réduit les variables $x, y, z, \ldots$ à une seule, et si l'on remplace la lettre l par la lettre r, on reviendra de la formule (15) à l'équation déjà connue

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^s} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s-r)}{\Gamma(r)} \tag{17}$$

(*voir* le résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal, p. 131). Dans le cas où l'on prend $s=1$, l'équation (16) se transforme, comme on le sait, en la formule

$$\Gamma(r)\Gamma(1-r) = \frac{\pi}{\sin\pi r},$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$\Gamma(1+r)\Gamma(1-r) = \frac{\pi r}{\sin\pi r}. \tag{18}$$

D'ailleurs ce que nous avons dit précédemment suffit pour prouver que l'on peut, dans les équations (17) et (18), attribuer à r, non seulement des valeurs positives, mais encore des valeurs imaginaires dont les parties réelles soient positives.

Si, dans l'équation (18), on pose en particulier

$$r = a\sqrt{-1},$$

a désignant une quantité réelle, cette équation donnera

$$\left[\int_0^\infty e^{-x}\cos(a\,\mathrm{l}x)\,dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty e^{-x}\sin(a\,\mathrm{l}x)\,dx\right]^2 = \frac{2\pi a}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}. \tag{19}$$

Il est bon d'observer que, pour revenir de l'équation (15) à l'équation (14), il suffirait de remplacer x par αx, y par $6y$, z par γz, ...