Cambridge University Press
978-1-108-00271-4 - Oeuvres Completes, Volume 5
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(SUITE.)

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

69.

Analyse mathématique. — *Mémoire sur l'évaluation et la réduction de la fonction principale dans les intégrales d'un système d'équations linéaires.*

C. R., t. IX, p. 637 (18 novembre 1839).

J'ai fait voir, dans mes *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, qu'étant donné un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants entre plusieurs variables principales et des variables indépendantes qui, dans les problèmes de Mécanique, seront, par exemple, trois coordonnées rectangulaires x, y, z et le temps t, on pourra, en supposant connues les valeurs initiales des variables principales et de quelques-unes de leurs dérivées, réduire la recherche des intégrales générales des équations proposées à l'évaluation d'une seule fonction des variables indépendantes, que j'ai nommée la *fonction principale*. Cette fonction principale n'est autre chose qu'une intégrale particulière de l'équation unique aux différences partielles à laquelle doit satisfaire une fonction linéaire quelconque des variables principales; et si, dans tous les termes de cette équation aux différences partielles, on efface la lettre employée pour représenter la fonction principale, on obtiendra, entre les puissances des signes de différentiation

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t,$$

ce que nous appelons l'*équation caractéristique*. Ajoutons : 1° que l'ordre n de cette équation caractéristique est généralement la somme des nombres qui, dans les équations données, représentent les ordres des dérivées les plus élevées des variables principales, différentiées par rapport au temps t; 2° que la fonction principale, assujettie à s'évanouir au premier instant, c'est-à-dire pour $t=0$, avec ses dérivées relatives au temps et d'un ordre inférieur à $n-1$, doit fournir une dérivée de l'ordre $n-1$ qui se réduise alors à une fonction de x, y, z choisie arbitrairement. Ainsi déterminée, la fonction principale peut toujours être représentée par une intégrale définie sextuple, relative à six variables auxiliaires, et qui renferme sous le signe $\int$ une exponentielle trigonométrique dont l'exposant est une fonction linéaire des variables indépendantes. Mais, dans beaucoup de cas, cette intégrale définie sextuple peut être remplacée par des intégrales d'un ordre moindre, ou se réduire même à une expression en termes finis. En conséquence, la fonction principale peut admettre des transformations et des réductions qu'il est bon de connaître, et qui sont l'objet du Mémoire que j'ai l'honneur d'offrir aujourd'hui à l'Académie.

Déjà, dans un article que renferme le *Compte rendu* de la séance du 26 août dernier, j'ai observé que la méthode exposée dans mon Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations aux différences partielles continue d'être applicable, lors même qu'on peut abaisser l'ordre de l'équation caractéristique; et qu'alors les intégrales générales se présentent sous une forme plus simple que celle qu'on aurait obtenue si l'on n'avait pas tenu compte de l'abaissement. C'est ce qui arrive en particulier lorsqu'un système simple, ou un double système de molécules, devient isotrope. En effet, comme les équations du mouvement, étant chacune du second ordre par rapport au temps, sont au nombre de trois dans un système simple, et au nombre de six dans un double système de molécules, il en résulte que l'équation caractéristique est généralement du sixième ordre pour un système simple, et du douzième ordre pour un double système. Toutefois, lorsque le système devient isotrope, l'ordre de l'équation caractéristique se réduit à quatre dans le premier cas, et à huit dans le second.

Dans les deux cas que nous venons de rappeler, le premier membre de l'équation caractéristique, réduite à sa forme la plus simple, est décomposable en deux facteurs rationnels du second ou du quatrième ordre; par conséquent l'équation caractéristique se décompose en deux autres d'ordres inférieurs. De semblables décompositions peuvent être employées avantageusement dans la détermination de la fonction principale. Ainsi, en particulier, je prouve que si l'équation caractéristique, étant de l'ordre $2m$, se décompose en m équations du second ordre, propres à fournir pour le carré de D_t des valeurs qui soient entre elles dans des rapports constants, la fonction principale, correspondante à l'équation caractéristique de l'ordre $2m$, offrira pour sa dérivée relative au temps, et de l'ordre $2m$, la somme de m termes respectivement proportionnels aux fonctions principales qui vérifieraient les m équations du second ordre. C'est pour cette raison que les équations du mouvement d'un système isotrope, lorsqu'elles deviennent homogènes, fournissent toujours des intégrales générales semblables à celles que M. Poisson a données dans les tomes VIII et X des *Mémoires de l'Académie*, la fonction principale pouvant alors être réduite à celle que l'on obtient en intégrant l'équation du son, et cette réduction pouvant être opérée, quel que soit d'ailleurs le rapport entre les vitesses de propagation des deux espèces d'ondes planes compatibles avec la constitution du système, par conséquent soit que l'on suppose ce rapport égal à $\sqrt{3}$ avec MM. Navier et Poisson, ou qu'on le réduise à zéro comme je le fais dans la *Théorie de la lumière*.

Après avoir indiqué les avantages que peut offrir, dans la détermination de la fonction principale, la décomposition de l'équation caractéristique en plusieurs autres, je passe à des réductions qui s'opèrent dans le cas même où cette équation est indécomposable. Je trouve en particulier que, dans le cas où elle est homogène, on peut, en considérant les deux systèmes de variables auxiliaires comme deux systèmes de coordonnées rectangulaires, et substituant à celles-ci des coordonnées polaires, réduire l'intégrale sextuple qui représente la fonction principale à une intégrale quadruple. Alors les résultats qu'on obtient sont analogues à ceux que j'ai donnés dans un Mémoire présenté à l'Académie le 17 mai 1830, et dont un extrait a été inséré dans le *Bulletin* de M. de Férussac de la même année.

Enfin, lorsque l'équation caractéristique est non seulement homogène, mais du second ordre, l'intégrale quadruple qui représente la fonction principale se réduit à une intégrale double semblable à celles auxquelles je suis parvenu dans un Mémoire que renferme le XXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Outre les réductions que nous venons d'indiquer, et qui ne diminuent en rien la généralité des solutions, il en est d'autres qui tiennent à des formes spéciales des fonctions arbitraires introduites par l'intégration. Lorsqu'on adopte ces formes spéciales, on obtient, non plus les intégrales générales des équations données, mais des intégrales particulières qui peuvent souvent se présenter sous une forme très simple et même s'exprimer en termes finis. Telles sont, par exemple, les intégrales qui représentent ce que nous avons nommé les mouvements simples d'un ou de plusieurs systèmes de molécules. Mais les mouvements simples et par ondes planes ne sont pas les seuls dans lesquels les variables principales puissent être exprimées par des fonctions finies des variables indépendantes. Il existe d'autres cas où cette condition se trouve pareillement remplie. Ainsi, en particulier, lorsque dans un système isotrope les équations des mouvements infiniment petits deviennent homogènes, des intégrales en termes finis peuvent représenter des ondes sphériques du genre de celles que j'ai mentionnées dans le n° 19 des *Comptes rendus* de 1836 (1er sem.) [1], savoir, des ondes dans lesquelles les vibrations moléculaires soient dirigées suivant les éléments de circonférences de cercles parallèles

[1] *Œuvres de Cauchy*, S. I, t. IV. — Extrait n° 7, p. 32 et suiv.

tracés sur les surfaces sphériques, ces vibrations étant semblables entre elles, et isochrones pour tous les points d'une même circonférence. De plus, si ce qu'on appelle la *surface des ondes* est un ellipsoïde, des intégrales en termes finis représenteront encore des ondes ellipsoïdales dans lesquelles les vibrations moléculaires resteront les mêmes pour tous les points situés sur une même surface d'ellipsoïde, ces vibrations étant alors dirigées suivant des droites parallèles. Au reste, je reviendrai plus en détail dans un autre Mémoire sur ces diverses espèces d'ondes qui se propagent en conservant constamment les mêmes épaisseurs.

§ I^er. — *Sur les avantages que peut offrir la décomposition de l'équation caractéristique en plusieurs autres.*

Considérons, pour fixer les idées, un système d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants, entre plusieurs variables principales, et quatre variables indépendantes, dont trois x, y, z pourront représenter des coordonnées rectangulaires, et le quatrième t le temps. Si l'on nomme 8 l'une quelconque des variables principales, l'élimination de toutes les autres entre les équations linéaires données fournira une équation résultante

$$\nabla 8 = 0, \tag{1}$$

dans laquelle ∇ sera une fonction entière des caractéristiques

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t,$$

et l'on vérifiera l'équation (1) en prenant pour 8, non seulement l'une quelconque des variables principales, mais encore une fonction linéaire quelconque de ces variables. Alors aussi

$$\nabla = 0 \tag{2}$$

sera l'*équation caractéristique*, et si l'on nomme n l'exposant de la plus haute puissance de D_t contenue dans ∇, n représentera l'*ordre* ou le degré de l'équation caractéristique. Enfin, si le coefficient de D_t^n dans ∇

se réduit à l'unité, alors, $\varpi(x, y, z)$ désignant une fonction arbitraire des coordonnées, la fonction principale ϖ devra vérifier, quel que soit t, l'équation linéaire

$$\nabla\varpi = 0, \tag{3}$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n-2}\varpi = 0, \quad D_t^{n-1}\varpi = \varpi(x, y, z). \tag{4}$$

Cela posé, il est facile de reconnaître les avantages que peut offrir la décomposition de l'expression symbolique ∇ en d'autres expressions de même forme.

Supposons, par exemple,

$$\nabla = \nabla'\nabla'',$$

∇' étant du degré n' par rapport à D_t, et ayant pour premier terme $D_t^{n'}$. Alors, si l'on pose

$$\nabla''\varpi = \Pi, \tag{5}$$

Π sera une fonction principale propre à vérifier, quel que soit t, l'équation linéaire

$$\nabla'\Pi = 0, \tag{6}$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\Pi = 0, \quad D_t\Pi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n'-2}\Pi = 0, \quad D_t^{n'-1}\Pi = \varpi(x, y, z). \tag{7}$$

La valeur de Π étant obtenue, on aura pour déterminer ϖ l'équation (5) jointe aux conditions

$$\varpi = 0, \quad D_t\varpi = 0, \quad \ldots, \quad D_t^{n''-1}\varpi = 0, \tag{8}$$

la valeur de n'' étant $n - n'$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\nabla = (D_t^2 - G)(D_t^2 - H)\ldots, \tag{9}$$

G, H, ... étant seulement fonctions de

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z,$$

et admettons que ces fonctions soient entre elles dans des rapports constants. On aura identiquement

$$\frac{D_t^{n-2}}{\nabla} = \frac{g}{D_t^2 - G} + \frac{h}{D_t^2 - H} + \ldots, \tag{10}$$

g, h, ... désignant des quantités constantes. Cela posé, soient

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots$$

des fonctions principales propres à vérifier, quel que soit t, les équations linéaires

$$(D_t^2 - G)\varpi_1 = 0, \qquad (D_t^2 - H)\varpi_2 = 0, \qquad \ldots, \tag{11}$$

et, pour $t = 0$, les conditions

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad D_t\varpi_1 = D_t\varpi_2 = \ldots = \varpi(x, y, z). \tag{12}$$

Je prouve de deux manières différentes que l'on aura

$$D_t^{n-2}\varpi = g\varpi_1 + h\varpi_2 + \ldots, \tag{13}$$

et, par suite,

$$\varpi = D_t^{2-n}(g\varpi_1 + h\varpi_2 + \ldots). \tag{14}$$

L'une des deux démonstrations se déduit immédiatement des formules (3), (4), (11) et (12); l'autre, qui est la plus simple, repose sur la transformation de la fonction principale ϖ en intégrale définie, transformation qu'il est utile d'opérer lors même que les fonctions G, H cessent d'être entre elles dans des rapports constants. Ajoutons que, n étant supérieur à 2, le signe

$$D_t^{2-n} = D_t^{-(n-2)}$$

indiquera, dans l'équation (14), $n - 2$ intégrations successives effectuées chacune, par rapport à t, à partir de l'origine $t = 0$.

Au reste, la proposition contenue dans la formule (14) peut être généralisée; et, en effet, on établit, à l'aide des mêmes raisonnements, celle que nous allons énoncer.

Théorème. — *Supposons que, dans l'équation caractéristique*

$$\nabla = 0,$$

la plus haute puissance de D_t *ait pour coefficient l'unité, et que le premier membre* ∇ *de cette équation soit décomposable en facteurs de même forme, en sorte qu'on ait*

$$\nabla = \nabla' \nabla'' \ldots;$$

soient d'ailleurs

$$\varpi, \quad \varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots$$

les fonctions principales correspondantes aux équations caractéristiques

$$\nabla = 0, \qquad \nabla' = 0, \qquad \nabla'' = 0, \qquad \ldots.$$

Si l'on a identiquement

$$\frac{D_t^m}{\nabla} = \frac{g}{\nabla'} + \frac{h}{\nabla''} + \ldots, \tag{15}$$

g, h, ... *désignant des quantités constantes, on en conclura*

$$D_t^m \varpi = g\,\varpi_1 + h\,\varpi_2 + \ldots,$$

et par conséquent

$$\varpi = D_t^{-m}(g\,\varpi_1 + h\,\varpi_2 + \ldots). \tag{16}$$

§ II. — *Transformation de la fonction principale.*

Soient

$$\nabla = F(D_x, D_y, D_z, D_t)$$

le premier membre de l'équation caractéristique, et

$$\mathcal{S} = F(u, v, w, s)$$

ce que devient ce premier membre, quand on y remplace

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

par les lettres

$$u, \quad v, \quad w, \quad s;$$

enfin soient

$$\mathrm{u}, \quad \mathrm{v}, \quad \mathrm{w}, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

six variables auxiliaires, et supposons : 1° que u, v, w soient liées avec u, v, w par les formules

$$u = \mathrm{u}\sqrt{-1}, \qquad v = \mathrm{v}\sqrt{-1}, \qquad w = \mathrm{w}\sqrt{-1};$$