

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

III.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des équations différentielles.*

C. R., t. II, p. 85 (25 janvier 1836).

Dans ce Mémoire, l'auteur ramène d'abord l'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux différences partielles du premier ordre. Il exprime, par des intégrales définies, les intégrales des équations proposées.

Il s'occupe ensuite de la convergence des séries dans lesquelles ces intégrales se développent. Il donne les conditions de cette convergence et les limites des restes que l'on néglige.

Il annonce, en terminant, qu'il appliquera les méthodes contenues dans ce Mémoire à l'intégration des équations différentielles qui expriment les mouvements simultanés des astres dont se compose notre système planétaire.

2.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Lettre à M. le Président de l'Académie des Sciences.*

C. R., t. II, p. 182 (22 février 1836).

L'Académie des Sciences a déjà reçu les premières livraisons des *Nouveaux Exercices* que j'ai eu l'honneur de lui offrir. En attendant

6 COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE.

que les suivantes lui parviennent, je ne puis résister au désir d'indiquer ici quelques-uns des résultats qui s'y trouvent contenus. Ces résultats me paraissent de nature à intéresser l'Académie, à laquelle je vous prie de vouloir bien donner lecture de cette Note, en demandant qu'elle soit jointe au procès-verbal et déposée dans les archives.

Les livraisons, déjà imprimées jusqu'à la septième, renferment la suite du Mémoire sur la dispersion de la lumière. Quelques autres encore se rapporteront au même objet. Dans le § III, que vous avez reçu, j'ai donné (p. 34 et 35) les conditions nécessaires et suffisantes pour que la propagation de la lumière soit la même en tous sens. Ces conditions établissent des rapports numériques entre certaines sommes triples et aux différences finies, composées de termes dont chacun dépend : 1° de la distance r de deux molécules éthérées; 2° des angles α , β , γ formés par cette distance avec les axes coordonnés; 3° de l'action réciproque $f(r)$ de deux molécules l'une sur l'autre, et fournissent le moyen de débarrasser des angles α , β , γ les sommes que l'on conserve dans le calcul. En supposant ces conditions remplies, on obtient pour tous les milieux une première approximation des mouvements de l'éther; et l'on reconnaît que la durée T d'une oscillation moléculaire pour une couleur donnée, ou le rapport $s = \frac{2\pi}{T}$, est liée avec l'épaisseur l d'une onde plane, ou le rapport $k = \frac{2\pi}{l}$, par une équation du troisième degré en s^2 qui offre deux racines égales et une racine simple, toutes développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de k^2 . Pour une couleur donnée, c'est-à-dire, pour une valeur donnée de s , cette équation sert à déterminer la longueur d'ondulation, ou la valeur de k , et la vitesse de propagation de l'onde lumineuse, ou $\Omega = \frac{s}{k}$.

D'autre part, les conditions dont il s'agit sont toujours remplies lorsque les sommations doubles relatives aux angles peuvent être transformées en intégrations doubles aux différences infiniment petites. Il est donc naturel de penser qu'on obtiendra une première approxima-

tion des mouvements de l'éther dans tous les milieux, et probablement avec une grande précision les lois de son mouvement dans le vide, si l'on transforme les sommes triples aux différences finies en intégrales triples aux différences infiniment petites. Alors, dans la série qui représente le développement de la racine double de l'équation du troisième degré, le coefficient de k^{2n} devient une intégrale simple relative à r , et se réduit même à une constante multipliée par la différence entre les deux valeurs qu'acquiert le produit

$$r^{2n+2} f(r)$$

quand on attribue successivement à la distance r des valeurs nulle et infinie. Cela posé, le phénomène de la dispersion disparaîtra si le produit en question s'évanouit toujours pour une valeur infinie de r , et se réduit à une constante différente de zéro, pour $n = 1$, et pour une valeur nulle de r . C'est ce qui aura lieu, par exemple, si la fonction $f(r)$ est de la forme

$$\frac{A}{r^h} e^{-hr},$$

h étant positif. D'ailleurs, pour que le rapport $\frac{k^2}{s^2}$ reste positif, il faudra que la constante A soit négative, c'est-à-dire que les molécules d'éther se repoussent. Donc nos formules donneront dans le vide, conformément à l'expérience, la même vitesse de propagation pour toutes les couleurs, si l'action réciproque de deux molécules est une force qui, pour un rapprochement considérable de ces molécules, soit *répulsive* et *réciproquement proportionnelle à la quatrième puissance de la distance*. Déjà dans les *Anciens Exercices* (III^e Volume, p. 203), en considérant le mouvement d'un système de points matériels, j'avais remarqué qu'il fallait supposer le produit $r^4 f(r)$ nul avec r pour faire disparaître des termes que M. Navier a conservés dans les équations des corps élastiques. Mes nouvelles recherches sur la lumière doivent faire croire que ce produit ne s'évanouit pas avec r dans le fluide éthéré. Probablement il ne s'évanouit pas non plus avec r dans les corps solides; d'où il résulte qu'on peut calculer le mouvement des corps élastiques

avec une approximation qui sera suffisante dans un grand nombre de cas, en transformant, avec M. Navier, les sommes aux différences finies en intégrales aux différences infiniment petites.

Lorsqu'on cesse de transformer les sommes relatives aux angles en intégrales aux différences infiniment petites, les deux racines égales de l'équation du deuxième degré sont généralement remplacées par deux racines peu différentes l'une de l'autre, et l'on obtient les phénomènes de la polarisation et de la double réfraction, comme on l'a vu dans les paragraphes déjà publiés de mon Mémoire. Mais on peut généraliser encore les résultats qui s'y trouvent contenus en développant les formules (24) du § II, et cessant de négliger les sommes composées de termes qui changent de signe en même temps que les cosinus des trois angles α , β , γ . Alors les racines de l'équation du troisième degré, développées en séries, renferment des puissances impaires de k multipliées par $\sqrt{-1}$; par suite la valeur de k , correspondante à une valeur donnée de s^2 , devient en partie imaginaire, et des exponentielles négatives, introduites comme facteurs dans les valeurs des déplacements moléculaires, peuvent les faire décroître très rapidement et les rendre insensibles à une distance plus ou moins considérable de la surface d'un milieu réfringent. Lorsque cette distance est comparable aux longueurs d'ondulation, le milieu devient opaque. D'ailleurs les coefficients de r , dans les exponentielles négatives, étant fonctions de k , varient avec les couleurs, ainsi que dans le passage du rayon ordinaire au rayon extraordinaire. Nos formules ainsi généralisées représentent les phénomènes de l'absorption de la lumière ou de certains rayons, produite par les verres colorés, la tourmaline, etc., le phénomène de la polarisation circulaire produite par le cristal de roche, l'huile de térébenthine, etc. (*Voir* les expériences de MM. Arago, Biot, Fresnel, etc.) Elles servent même à déterminer les conditions et les lois de ces phénomènes; elles montrent que généralement, dans un rayon de lumière polarisée, une molécule d'éther décrit une ellipse. Mais, dans certains cas particuliers, cette ellipse se change en une droite; et alors on obtient la polarisation rectiligne. Ajoutons

EXTRAIT N° 3.

9

que, si le coefficient de r dans les exponentielles négatives diffère de zéro, les ellipses décrites par les diverses molécules décroîtront de plus en plus pour des valeurs croissantes de r , et que, si ces valeurs croissent en progression arithmétique, l'intensité de la lumière décroîtra en progression géométrique. Enfin le calcul prouve que, dans le cristal de roche, l'huile de térébenthine, etc., la polarisation des rayons transmis parallèlement à l'axe (s'il s'agit du cristal de roche) n'est pas rigoureusement circulaire, mais qu'alors l'ellipse diffère très peu du cercle.

3.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Lettre à M. Ampère sur la théorie de la lumière.*

C. R., t. II, p. 207. (9 février 1836.)

Dans ma Lettre de vendredi, je vous ai fait connaître les divers résultats auxquels j'ai été conduit par mes dernières recherches sur la théorie de la lumière. (*Voir* p. 5 du présent Volume.) J'aurai bientôt l'honneur de vous adresser un extrait de ces recherches. Mais, en attendant, je désire joindre encore à l'exposition que j'en ai faite quelques observations nouvelles que je vous prie de vouloir bien communiquer à l'Académie dans sa plus prochaine séance.

Lorsque la propagation de la lumière est la même en tous sens, l'équation du troisième degré, qui établit une relation entre le carré de la quantité s , réciproquement proportionnelle aux durées des oscillations moléculaires, et la quantité k , réciproquement proportionnelle aux longueurs d'ondulations, étant résolue par rapport à s^2 , fournit deux racines égales et une racine simple. Or je trouve qu'au lieu de développer ces racines en séries, il est plus commode de les présenter sous forme finie. Dans ce cas, en nommant r la distance des deux molécules, $f(r)$ l'action de l'une sur l'autre, et changeant les sommes triples en

intégrales, je trouve que la racine double peut être représentée par la somme de deux termes, l'un constant, l'autre proportionnel à k^2 . Le terme constant a pour facteur la valeur extrême du produit $r^2 f(r)$ correspondante à une valeur infinie de r . Le second terme a pour facteur la valeur du produit $r^n f(r)$ correspondante à $r = 0$. Il en résulte que la racine double, ou la première valeur de s^2 , cessera de s'évanouir dans deux hypothèses, savoir : 1^o si $r^n f(r)$ se réduit à une constante finie pour $r = 0$; 2^o si le produit $r^2 f(r)$ se réduit à une constante finie pour $r = \infty$. La première condition sera remplie si l'on a

$$f(r) = \frac{A}{r^n} e^{-nr},$$

ou même, plus simplement,

$$f(r) = \frac{A}{r^n}.$$

La seconde condition sera remplie si l'on a

$$f(r) = \frac{A}{r^2}.$$

La première hypothèse me semble représenter les mouvements de l'éther dans le vide. La seconde représenterait-elle les mouvements moléculaires des corps pondérables? C'est ce que j'examinerai plus tard. Dans l'une et l'autre hypothèse, les termes conservés par M. Navier dans les équations du mouvement des corps subsistent, comme je le disais dans ma dernière Lettre. Mais il est juste d'observer que les rapports entre les coefficients semblent différents de ceux qui paraissent convenir aux corps élastiques. Il y a plus, dans la première hypothèse, il faut avoir soin de prendre pour origine d'une certaine intégrale relative à r , non pas précisément une valeur nulle de r , mais la distance des molécules les plus voisines. Autrement cette intégrale, qui d'ailleurs ne se trouve que dans la seconde valeur de s^2 , semblerait infinie. Quant à cette seconde valeur de s^2 , il serait intéressant d'examiner si elle ne pourrait pas représenter le mouvement de la chaleur. Je désirerais, pour cette raison, que vous eussiez la complaisance de

me transmettre quelques détails sur celle de vos séances où il a été question de la polarisation de la chaleur.

4.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Notes sur l'Optique, adressées à M. Libri.*

C. R., t. II, p. 341. (4 avril 1836.)

PREMIÈRE NOTE.

Suivant les principes que j'ai développés dans le *Mémoire sur la dispersion*, les mouvements de l'éther, pour un rayon simple d'une couleur donnée, se trouvent généralement représentés par les formules (24) du § II de ce Mémoire. Lorsque, dans ces mêmes formules, les dérivées du premier ordre des déplacements moléculaires ζ , η , ρ disparaissent, c'est-à-dire lorsque les coefficients de ces dérivées se réduisent à zéro, on obtient les formules (25), et par suite les formules (34), (35) du même paragraphe. La dernière de ces formules, ou l'équation (35), est une équation du troisième degré en s^2 qui sert à déterminer le rapport $s = \frac{2\pi}{K}$, ou bien encore la vitesse de propagation $A = \frac{s}{K} = \frac{l}{T}$ (T étant la durée d'une vibration, et $l = \frac{2\pi}{K}$ l'épaisseur d'une onde plane) en fonction de K et des cosinus a , b , c des angles formés par la perpendiculaire au plan de l'onde avec les axes coordonnés. Or, de cette équation du troisième degré en s^2 , je déduis très simplement une seconde équation de même degré qui doit être vérifiée en même temps que la première, toutes les fois que deux racines de la première deviennent égales entre elles, ce qui permet de déterminer avec une grande facilité les deux axes optiques, c'est-à-dire les directions que doit prendre le rayon ordinaire pour se confondre avec le rayon extraordinaire dans un milieu doublement réfringent. Les

12 COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE.

racines de la nouvelle équation du troisième degré sont, comme celles de la première, représentées par des fonctions des quantités K, a, b, c . Or il suffit d'admettre que ces fonctions deviennent indépendantes de a, b, c et de réduire, en outre, à leurs premiers termes les développements des inconnues en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de K , pour obtenir des formules entièrement semblables à celles que j'ai données dans la 51^e livraison des *Anciens Exercices* ⁽¹⁾ et par conséquent pour retrouver les théorèmes de Fresnel sur la double réfraction, sur la surface des ondes, etc. Toutefois il y a une remarque essentielle à faire, et que je vais indiquer.

Lorsque le plan de l'onde coïncide avec l'un des plans principaux dans un système de molécules qui offre trois axes d'élasticité rectangulaires, la vitesse de propagation d'un rayon polarisé parallèlement à l'un des axes peut être (voir la 51^e livraison, p. 69 et 70) la racine carrée de l'une quelconque des six quantités représentées par

$$\begin{array}{l} R + H, \quad P + I, \quad Q + G, \\ Q + I, \quad R + G, \quad P + H. \end{array}$$

D'après les formules de Fresnel, ces six quantités se réduiraient à trois, les vitesses de propagation de deux rayons polarisés perpendiculairement au même axe étant toujours égales. Or cela peut arriver de deux manières, sans que P, Q, R s'évanouissent, et cela arrivera effectivement : 1^o si les conditions

$$G = 0, \quad H = 0, \quad I = 0,$$

étant remplies, les vibrations des molécules s'effectuent dans les plans généralement nommés plans de polarisation, puisque alors on aura $P + I = P + H = P, \dots$; 2^o si G, H, I n'étant pas nulles, et les vitesses des molécules étant perpendiculaires aux plans de polarisation,

(1) V^e année. — Ce renvoi se rapporte à l'ancienne édition. Il en sera de même pour tous ceux qui suivront et qui se rapporteront à un texte non encore publié dans la présente édition. Lorsque celle-ci sera terminée, on publiera une Table de concordance qui indiquera les renvois aux divers volumes de la collection. Quant aux renvois qui concerneront des textes déjà reproduits dans la nouvelle édition, ils se rapporteront à cette dernière et seront signalés par une annotation indiquant la série, le tome et la page. (Note des éditeurs.)