Cambridge University Press
978-1-108-00266-0 - Oeuvres Completes
Augustin Louis Cauchy
Excerpt
More information

PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

II.

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

D'UNE

CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

ET

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES (¹).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. III, p. XI; 1820 (*Histoire de l'Académie*).

Jusqu'à présent il n'est aucun Traité de Calcul intégral où l'on ait donné les moyens d'intégrer complètement les équations aux différences partielles du premier ordre, quel que soit le nombre des variables indépendantes. M'étant occupé il y a plusieurs mois de cet objet, je fus assez heureux pour obtenir une méthode générale propre à remplir le but désiré. Mais, après avoir terminé mon travail, j'ai appris que M. Pfaff, géomètre allemand, était parvenu, de son côté, aux intégrales des équations ci-dessus mentionnées. Comme il s'agit ici d'une des questions les plus importantes du Calcul intégral, et que la méthode de M. Pfaff est différente de la mienne, j'ai pensé qu'une analyse abrégée de cette dernière pourrait intéresser les géomètres. En conséquence, je l'expose ici, en profitant, pour simplifier l'exposition, de quelques remarques faites par M. Coriolis, ingénieur des

(¹) Note rédigée par l'auteur sur le dernier de ces deux Mémoires, 27 janvier 1818.

Ponts et Chaussées, et de quelques autres qui me sont depuis peu venues à l'esprit. Ainsi simplifiée, la méthode dont j'ai fait usage fournit, à ce qu'il me semble, la solution la plus simple que l'on puisse donner de la question proposée. On en jugera par les considérations suivantes.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation aux différences partielles proposée renferme, avec les trois variables indépendantes x, y, z, une fonction inconnue u de ces trois variables, et les dérivées partielles p, q, r de la fonction u, par rapport à ces mêmes variables.

Pour que la valeur de u soit complètement déterminée, il ne suffira pas de savoir qu'elle doit vérifier l'équation donnée aux différences partielles. Il sera, de plus, nécessaire d'ajouter une condition; par exemple, d'assujettir la fonction u à recevoir, pour une valeur donnée x_0 de la variable x, une certaine valeur, fonction des variables y et z. La fonction de y et de z, dont il est ici question, pouvant être choisie à volonté, est la seule fonction arbitraire que doive renfermer l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles. Il est d'ailleurs facile, à l'aide des principes déjà connus, de ramener l'intégration de cette équation aux différences partielles, à l'intégration de cinq équations différentielles entre les six quantités

$$x, \quad y, \quad z, \quad u, \quad q, \quad r,$$

considérées comme fonctions d'une seule variable; et toute la difficulté se réduit à savoir ce que l'on doit faire des cinq constantes arbitraires introduites par l'intégration des cinq équations différentielles. Or, la méthode que je propose consiste à éviter l'introduction de ces constantes, ou plutôt à remplacer les constantes arbitraires par des valeurs particulières, attribuées aux inconnues y, z, u, q, r, et à intégrer les cinq équations différentielles, de manière que, pour $x = x_0$, on ait $y = y_0$, $z = z_0$, $u = u_0$, $q = q_0$, $r = r_0$; y_0, z_0 désignant deux nouvelles variables, u_0 une fonction arbitraire de ces mêmes variables, semblable à la fonction arbitraire de y et de z, qui représente la valeur de u pour $x = x_0$, et q_0, r_0 les deux dérivées partielles de u_0 relatives à y_0 et à z_0. Si, entre les cinq équations intégrales ainsi obtenues, on élimine q et r, il ne restera plus que trois formules, dont le système sera propre à représenter l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles. Ces trois formules renfermeront les quantités variables x, y, z, u; la quantité constante x_0, les deux nouvelles variables y_0, z_0, et la fonction arbitraire de ces nouvelles variables représentée par u_0, ainsi que ses dérivées du premier ordre relatives à y_0 et à z_0. Ce n'est qu'après avoir fixé la fonction arbitraire dont il s'agit qu'on pourra, en éliminant les nouvelles variables y_0, z_0, obtenir l'équation finie qui détermine u en fonction de x, y, z.

Rien n'empêche de conserver dans le calcul, avec les quantités variables x, y, z, u, q, r, la quantité p; si l'on observe d'ailleurs qu'on peut échanger entre elles, relativement aux rôles qu'elles jouent, les variables indépendantes x, y, z, on obtiendra, pour l'intégration générale d'une équation aux différences partielles à trois variables indépendantes, et même à un nombre quelconque de variables, la règle qui suit :

Substituez, par les moyens ordinaires, à l'équation aux différences partielles donnée, autant d'équations différentielles du premier ordre (moins une) qu'elle renferme de quantités variables, y compris les variables indépendantes, la fonction inconnue et ses dérivées partielles. Les variables indépendantes seront traitées symétriquement dans les équations différentielles dont l'une pourra être remplacée par l'équation aux différences partielles données.

Cela posé, intégrez les équations différentielles dont il s'agit, par rapport à toutes les variables qu'elles renferment, à partir de certaines limites que vous considérerez comme de nouvelles variables, assujetties aux mêmes relations que les premières. Regardez ensuite, dans les équations intégrales obtenues, l'une des nouvelles variables indépendantes, comme réduite à une quantité constante, et les autres comme devant être éliminées. Vous aurez un système de formules propres à représenter l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles données. Ces formules ne renferment qu'une seule fonction arbitraire avec ses dérivées partielles du premier ordre, savoir la nouvelle variable qui correspond à la fonction inconnue, et que l'on doit considérer comme une fonction arbitraire de celles des nouvelles variables qui doivent être éliminées.

SUR

LA RÉSOLUTION ANALYTIQUE

DES

ÉQUATIONS DE TOUS LES DEGRÉS

PAR LE MOYEN DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IV, p. XXVI; 1824. (*Histoire de l'Académie.*)

On a fait beaucoup de tentatives pour obtenir la solution des équations littérales d'un degré supérieur au quatrième. Toutes ces tentatives ont été inutiles; et même un géomètre italien, M. Ruffini, a démontré, dans ces derniers temps, qu'il était impossible de trouver, pour la solution de l'équation générale d'un degré supérieur au quatrième, des formules analogues à celles qu'on a découvertes pour les quatre premiers degrés. Il ne reste donc aucun espoir d'exprimer les racines d'une équation de degré quelconque par des fonctions irrationnelles des coefficients de son premier membre. Toutefois, avant de renoncer pour toujours à présenter ces racines sous une forme finie, il convenait d'examiner si l'on ne pourrait pas les réduire à des intégrales définies, qu'on a tant de moyens de réduire en nombres. Telle est la question que s'est proposée M. Cauchy. Déjà, en 1804, M. Parseval avait essayé de la résoudre en suivant, à l'aide d'un artifice très ingénieux, la suite donnée par M. Lagrange pour la résolution d'une équation algébrique ou transcendante.

Les calculs de M. Parseval étant fondés sur la considération de séries dont la convergence n'est pas toujours assurée, les résultats auxquels il parvient ne pourront être considérés comme établis généralement d'une manière rigoureuse. Aussi l'auteur ayant cherché à les vérifier *a posteriori*, dans le cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles, a-t-il reconnu que, dans cette hypothèse même, l'intégrale qu'il substitue à la suite de M. Lagrange ne représente une des racines que sous certaines conditions. La méthode de M. Cauchy, fondée immédiatement sur la propriété d'une classe d'intégrales définies, conduit facilement à la solution du problème dans tous les cas possibles. Nous nous bornerons aux principaux résultats :

1° Lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, chacune de ces racines peut être exprimée par une intégrale définie. Cette intégrale renferme deux constantes arbitraires entre lesquelles on suppose comprise la seule racine dont il est question. Du reste, ces deux constantes peuvent varier comme on voudra, sans que l'intégrale change pour cela de valeur. Si les deux constantes s'écartent l'une de l'autre, de manière que deux, trois ou quatre racines soient comprises entre elles, l'intégrale définie exprimera la somme de ces deux, trois, quatre racines, etc.

2° Lorsqu'une équation a en même temps des racines réelles et des racines imaginaires, on peut encore représenter chaque racine réelle par une intégrale définie qui renferme deux constantes arbitraires, pourvu que l'on suppose comprise entre ces deux constantes la partie réelle de la seule racine que l'on considère. Cette remarque suffit pour montrer en théorie que toute racine d'une équation peut être exprimée par une intégrale. Toutefois, comme, dans le cas où l'on veut obtenir les valeurs numériques des racines, la détermination des deux constantes peut entraîner de longs calculs, il est alors préférable d'employer le moyen qui va être indiqué.

On cherchera d'abord une constante unique, inférieure au plus petit coefficient positif de $\sqrt{-1}$, dans les racines imaginaires. On y parviendra sans peine par la méthode exposée dans la quatrième note de la *Résolution des équations numériques*. Cela posé, il deviendra facile de substituer à l'équation proposée deux autres équations qui aient pour racines respectives : la première, les racines réelles de l'équation proposée, et la seconde, celles des racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Les coefficients de ces deux équations seront des intégrales définies renfermant la seule constante dont on vient de parler. On doit même observer que, si toutes les racines sont imaginaires, la constante dont il s'agit pourra être supposée nulle. Pour fixer les idées, considérons une équation du sixième ou du huitième degré dont toutes les racines sont imaginaires. On pourra, d'après ce qu'on vient de dire, et sans la recherche préliminaire d'une constante, réduire immédiatement cette équation à deux autres du troisième ou du quatrième degré.

Dans toutes les intégrales employées dans cette méthode, la fonction sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle de la variable, qui ne devient jamais infinie, et pour laquelle le degré du dénominateur est supérieur au moins de deux unités à celui du numérateur. Il en résulte que chacune de ces intégrales a une valeur finie et déterminée que l'on peut réduire en nombres. Souvent même il sera aisé de la transformer en une série très convergente dont les termes suivent une loi connue; en sorte que l'on peut immédiatement prolonger cette série autant qu'on voudra. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on considère une des équations à trois termes, que l'on ne sait pas résoudre dans le cas où toutes les racines sont imaginaires.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS

EN

SÉRIES PÉRIODIQUES [1].

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VI, p. 603; 1827.

La solution d'un grand nombre de problèmes de Physique mathématique exige le développement des fonctions en séries périodiques; par exemple, en séries ordonnées suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Dans les séries de ce genre, les coefficients des différents termes sont ordinairement des intégrales définies qui renferment des sinus ou des cosinus; et, lorsque les intégrations peuvent s'effectuer, en raison d'une forme particulière attribuée à la fonction qu'il s'agit de développer, on reconnaît aisément que les séries obtenues sont convergentes. Toutefois il était à désirer que cette convergence pût être démontrée d'une manière générale, indépendamment des valeurs des fonctions. Or, on y parvient facilement en faisant usage des formules que j'ai données dans les Mémoires sur les ondes [2], et sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et remplaçant, à l'aide de ces formules, les sinus ou cosinus renfermés sous

(1) Lu à l'Académie royale des Sciences, le 27 février 1826.

(2) *Voir* la page 232 du Mémoire *Sur la Théorie des ondes,* et la page 29 du Mémoire *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.* (*Œuvres de Cauchy,* S. I, T. I, p. 236, 237 et S. II, T. XV.)