PREMIÈRE SÉRIE.

MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

I.

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

AVERTISSEMENT.

Le Mémoire qu'on va lire se trouve imprimé tel qu'il a été couronné par l'Institut, et d'après le manuscrit remis au concours en septembre 1815. Toutefois on a pensé que, pour éclaircir les difficultés qui peuvent s'offrir au lecteur, il serait utile d'ajouter quelques Notes nouvelles à celles qui faisaient déjà partie de l'Ouvrage; mais, afin que ces nouvelles Notes puissent être facilement distinguées des autres, on a marqué chacune d'elles d'un astérisque.

THÉORIE

DE LA

PROPAGATION DES ONDES

A LA SURFACE D'UN FLUIDE PESANT

D'UNE PROFONDEUR INDÉFINIE (*).

PRIX D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

REMPORTÉ PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

(CONCOURS DE 1815.)

Nosse quot Ionii veniant ad littora fluctus.
VIRG., *Georg.*, lib. II, v. 108.

Le problème qu'il s'agit de résoudre est celui-ci :

Une masse fluide pesante, primitivement en repos, et d'une profondeur indéfinie, a été mise en mouvement par l'effet d'une cause donnée. On demande, au bout d'un temps déterminé, la forme de la surface extérieure du fluide et la vitesse de chacune des molécules situées à cette même surface.

Pour plus de généralité, je déterminerai à chaque instant non-seulement l'état de la surface, mais aussi celui de toute la masse fluide.

(*) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques.* Tome I. Imprimé par autorisation du Roi à l'Imprimerie royale; 1827.

Comme tout, dans ce problème, dépend de la cause à laquelle est dû le mouvement du fluide, il faut commencer par fixer les idées sur cet objet. Cette cause peut être, ou l'action d'une partie de la masse fluide qui, soulevée ou déprimée dans l'origine par une force quelconque, a été ensuite abandonnée à elle-même, ou l'action de forces impulsives (*) primitivement appliquées à la surface. On peut même supposer les deux causes réunies, afin de donner à la question toute la généralité dont elle est susceptible. Lorsque la première cause existe seule, les vitesses initiales des molécules fluides sont nulles. Mais, lorsque la seconde agit sans la première, ou se joint avec elle, les molécules acquièrent dès le premier instant des vitesses sensibles; en sorte que, dans le cas le plus général, c'est déjà un problème à résoudre que de déterminer l'état initial du fluide. Au reste, comme cet état dépend absolument des causes qui produisent le mouvement du fluide, et que ces causes peuvent varier d'un point à l'autre suivant une infinité de lois fort différentes, on ne peut évidemment obtenir rien de général à cet égard, si ce n'est pour les parties du fluide situées hors de l'influence immédiate des causes que l'on considère.

Quant à l'état du fluide au bout d'un temps déterminé, il sera lui-même très-irrégulier dans les différents points de la masse fluide primitivement soumis à l'influence immédiate des causes qui ont produit le mouvement. Mais, si l'on s'éloigne de ces mêmes points à des distances de plus en plus grandes, on verra le mouvement devenir de plus en plus régulier. La distance à laquelle cette régularité deviendra sensible sera d'autant moins considérable que la portion de surface immédiatement soumise à l'influence des causes motrices était moins étendue et que ces causes elles-mêmes étaient moins actives. Par suite, les lois du mouvement seront très-régulières à une distance finie, si les causes motrices avaient peu d'intensité et n'embrassaient originairement dans leur action qu'une très-petite étendue de la masse fluide. De ces remarques nous pouvons conclure qu'il sera fort utile de considérer en

(*) *Voir* la Note XIV.

particulier le cas où la hauteur des ondes et les vitesses initiales des molécules fluides sont très-petites. La détermination des lois relatives à cette hypothèse est en effet le point le plus essentiel de la théorie que nous avons à établir. C'est ainsi que, dans la théorie du son, on s'attache particulièrement à déterminer les lois du mouvement relatives au cas où les vitesses des molécules d'air sont supposées très-petites.

L'état de la question étant suffisamment établi par ce qui précède, je vais maintenant la résoudre. Pour plus de commodité, je diviserai la solution, c'est-à-dire le Mémoire qui la renferme, en trois Parties.

Dans la première Partie, je ferai voir comment, lorsqu'on connait à l'origine la forme de la surface extérieure et les forces qui agissent sur elle, on peut en déduire les équations qui expriment l'état initial du fluide.

Je donnerai dans la seconde les équations qui déterminent, à une époque quelconque du mouvement, l'état de la masse fluide et celui de sa surface.

Enfin, dans la troisième Partie, j'établirai les lois générales qui résultent des formules données dans la seconde, et je déterminerai les valeurs numériques des constantes qui entrent dans l'expression de ces lois.

Pour plus de facilité, je renverrai à la fin du Mémoire, dans les Notes séparées (*), les démonstrations de diverses formules analytiques que j'ai fait servir à la solution du problème.

(*) Les treize premières Notes sont celles qui faisaient partie du Mémoire couronné; les suivantes, marquées chacune d'un astérisque, ont été ajoutées depuis, comme il est dit dans l'Avertissement.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ÉTAT INITIAL.

SECTION PREMIÈRE.

DES ÉQUATIONS QUI DÉTERMINENT L'ÉTAT INITIAL DE LA MASSE FLUIDE.

1. Considérons un fluide pesant, homogène, d'une densité constante et d'une profondeur indéfinie, et supposons que, ayant été primitivement en repos, il commence à se mouvoir à partir d'un instant déterminé que je prendrai pour origine des temps. Les causes qui déterminent ce mouvement peuvent être, comme on l'a déjà remarqué, de deux espèces, savoir : 1° l'action d'une partie de la masse fluide qui, après avoir été soulevée ou déprimée par une force quelconque, a été ensuite abandonnée à elle-même ; 2° l'action de forces impulsives primitivement appliquées à la surface extérieure. Si la première cause agit isolément, les vitesses initiales seront nulles ; mais, si la seconde cause se joint à la première, les diverses molécules de fluide acquerront, dès le premier instant, des vitesses sensibles, et ces vitesses satisferont, dans toute l'étendue de la masse fluide, à certaines équations de condition qu'il s'agit d'établir. On y parvient à l'aide des considérations suivantes.

2. Lorsqu'on applique aux différents points de la surface d'un fluide des pressions et des impulsions données, les impulsions, ainsi que les pressions, se transmettent en partie aux diverses molécules dont le fluide se compose ; en sorte que chaque molécule, considérée comme un parallélépipède rectangle, éprouve sur ses six faces des pressions et

des impulsions déterminées. Ces pressions et ces impulsions peuvent être variables d'un point à l'autre. Mais, en vertu de la propriété caractéristique des fluides, elles sont pour chaque point égales dans tous les sens. Cela posé, rapportons les positions des molécules du fluide à trois plans rectangulaires entre eux, ayant pour intersections respectives les axes horizontaux des x et z, et l'axe vertical des y. Désignons par m une de ces molécules, par δ sa densité, par a, b, c les coordonnées d'un de ses sommets dans le premier instant, et par $a + da$, $b + db$, $c + dc$ les coordonnées du sommet opposé, que nous supposerons être le plus éloigné de l'origine. Les trois dimensions de la molécule étant alors respectivement égales à

$$da, \quad db, \quad dc,$$

son volume sera $da\, db\, dc$, et sa masse aura pour mesure le produit

$$\delta\, da\, db\, dc.$$

Soient, en outre, u_0, v_0, w_0 les vitesses initiales de la molécule dans le sens des coordonnées, et q_0 l'impulsion qui, à l'origine du mouvement, se fait sentir également dans toutes les directions au point de la masse fluide dont les coordonnées sont a, b, c, cette impulsion étant rapportée à l'unité de surface, ainsi que cela se pratique relativement aux pressions. La molécule m éprouvera sur ses six faces des impulsions qui, prises deux à deux, seront dirigées en sens contraires, et dont les différences respectives, rapportées à l'unité de surface, seront

$$-\frac{\partial q_0}{\partial a}\, da, \quad -\frac{\partial q_0}{\partial b}\, db, \quad -\frac{\partial q_0}{\partial c}\, dc.$$

De plus, comme les faces de la molécule perpendiculaires aux axes des x, y et z ont respectivement pour mesures les produits

$$db\, dc, \quad da\, dc, \quad da\, db,$$

les différences des impulsions que supportent, à raison de leur étendue, les faces opposées, seront évidemment

$$-\frac{\partial q_0}{\partial a}\, da\, db\, dc, \quad -\frac{\partial q_0}{\partial b}\, da\, db\, dc, \quad -\frac{\partial q_0}{\partial c}\, da\, db\, dc.$$

D'ailleurs ces différences d'impulsions doivent nécessairement faire équilibre aux quantités de mouvement qui résultent des vitesses u_0, v_0, w_0 acquises par la molécule, prises en signe contraire; car il suffirait de lui imprimer ces vitesses dans des directions opposées à celles qu'elles ont effectivement pour qu'elle restât en repos; et, comme les quantités de mouvement dues à ces vitesses, considérées dans leurs propres directions, sont respectivement égales aux produits de u_0, v_0, w_0 par la masse $\delta\, da\, db\, dc$ de la molécule, c'est-à-dire à

$$\delta\, u_0\, da\, db\, dc, \quad \delta\, v_0\, da\, db\, dc, \quad \delta\, w_0\, da\, db\, dc,$$

si on les égale aux différences trouvées, afin de satisfaire à la condition énoncée, on aura les équations

$$(1) \qquad u_0\delta + \frac{\partial q_0}{\partial a} = 0, \quad v_0\delta + \frac{\partial q_0}{\partial b} = 0, \quad w_0\delta + \frac{\partial q_0}{\partial c} = 0.$$

3. Ces équations cesseraient d'être exactes si, à l'origine du mouvement, une cause quelconque agissait, non pas sur les faces, mais sur la masse même de la molécule que l'on considère, de manière à imprimer directement à cette masse une vitesse déterminée. Mais cette cause n'aurait évidemment d'autre effet que d'ajouter aux valeurs de u_0, v_0, w_0 tirées des équations (1) les composantes de la vitesse en question, parallèles aux axes des coordonnées. Si donc on désigne par

$$\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W}$$

ces trois composantes, les valeurs de u_0, v_0, w_0 relatives à la nouvelle hypothèse qu'on vient de faire seront respectivement

$$u_0 = \mathfrak{U} - \frac{1}{\delta}\frac{\partial q_0}{\partial a}, \quad v_0 = \mathfrak{V} - \frac{1}{\delta}\frac{\partial q_0}{\partial b}, \quad w_0 = \mathfrak{W} - \frac{1}{\delta}\frac{\partial q_0}{\partial c}.$$

Ces dernières équations, qu'on peut aussi présenter sous la forme suivante :

$$(2) \quad (u_0 - \mathfrak{U})\delta + \frac{\partial q_0}{\partial a} = 0, \quad (v_0 - \mathfrak{V})\delta + \frac{\partial q_0}{\partial b} = 0, \quad (w_0 - \mathfrak{W})\delta + \frac{\partial q_0}{\partial c} = 0,$$

sont applicables à la théorie d'un fluide entraîné par le mouvement d'un corps solide sur lequel il repose, par exemple, à l'état initial de la mer que la Terre, supposée d'abord immobile et mise ensuite en mouvement autour de son centre, emporterait avec elle dans l'espace. Mais, lorsque l'on considère un fluide libre, on ne voit aucun moyen d'imprimer directement à ses molécules, et indépendamment des impulsions que sa surface peut éprouver, des vitesses instantanées. En conséquence, nous supposerons dans ce qui va suivre

$$\mathfrak{U} = 0, \quad \mathfrak{V} = 0, \quad \mathfrak{W} = 0,$$

ce qui réduira les équations (2) aux équations (1).

4. Comme nous considérons un fluide homogène et d'égale densité, δ est une quantité constante. Dans cette hypothèse, on déduit facilement des équations (1) les trois suivantes :

$$\frac{\partial u_0}{\partial b} = \frac{\partial v_0}{\partial a}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial c} = \frac{\partial w_0}{\partial a}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial c} = \frac{\partial w_0}{\partial b}. \tag{3}$$

Toutefois, il est bon de remarquer que ces équations de condition n'auraient plus généralement lieu si la densité variait d'un point à l'autre de la masse fluide. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que les équations (3) expriment les conditions nécessaires pour que la quantité

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc$$

soit une différentielle complète relativement aux trois variables indépendantes a, b, c.

5. Il est encore une équation de condition à laquelle doivent satisfaire les vitesses

$$u_0, \quad v_0, \quad w_0.$$

En effet, puisque la densité du fluide est invariable par hypothèse, non-seulement d'un point à l'autre, mais encore avec le temps, chaque molécule, ne pouvant changer de masse, doit conserver le même volume pendant toute la durée du mouvement. Cela posé, concevons que le sommet de la molécule m, auquel appartenaient, dans le premier instant, les trois coordonnées a, b, c, se trouve, au bout du temps t,