CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematical Sciences

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique

In 1821, the French mathematician Augustin-Louis Cauchy published Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique, a textbook designed to teach his students the basic theorems of calculus in as rigorous a way as possible. Cauchy was a pioneer of mathematical analysis, a branch of mathematics concerned with the idea of a limit, whether of a sequence or of a function. This book consists of 12 chapters that discuss real functions, infinitely small and large quantities, substitution groups, symmetrical functions, unknown variables, imaginary functions, and rational fractions in a recurrent series. It also provides formulas for solving various problems, such as converting the sine and cosine of a multiple polynomial arc and the Lagrange interpolation. Cauchy built on the work of Leibniz and Newton and is generally regarded as one of the greatest mathematicians in history. This is a reissue of one of his most important contributions to the field.

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection will bring back to life books of enduring scholarly value across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique

Augustin-Louis Cauchy

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge New York Melbourne Madrid Cape Town Singapore São Paolo Delhi

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org
Information on this title: www.cambridge.org/9781108002080

This edition first published 1821
This digitally printed version 2009

ISBN 978-1-108-00208-0

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

INTRODUCTION.

QUELQUES personnes, qui ont bien voulu guider mes premiers pas dans la carrière des sciences, et parmi lesquelles je citerai avec reconnaissance MM. *Laplace* et *Poisson*, ayant témoigné le desir de me voir publier le Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, je me suis décidé à mettre ce Cours par écrit pour la plus grande utilité des élèves. J'en offre ici la première partie connue sous le nom d'*Analyse algébrique*, et dans laquelle je traite successivement des diverses espèces de fonc-

a

tions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations, et de la décomposition des fractions rationnelles. En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, j'ai présenté des développemens qui peuvent être utiles soit aux Professeurs et aux Élèves des Colléges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l'analyse.

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme;* dans le chapitre VII, qu'*une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités reelles;* dans le chapitre IX, que, *si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse;* &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront, je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

Au reste, si j'ai cherché, d'une part, à perfectionner l'analyse mathématique, de l'autre, je suis loin de prétendre que cette analyse doive suffire à toutes les sciences de raisonnement. Sans doute, dans les sciences qu'on nomme naturelles, la seule méthode qu'on puisse employer avec succès consiste à observer les faits et à soumettre ensuite les observations au calcul. Mais ce serait une erreur grave de penser qu'on ne trouve la certitude que dans les démonstrations géométriques, ou dans le témoignage des sens ; et quoique personne jusqu'à ce jour n'ait essayé de prouver par l'analyse l'existence d'Auguste ou celle de LOUIS XIV, tout homme sensé conviendra que cette existence est aussi certaine pour lui que le carré de l'hypothénuse ou le théorème de *Maclaurin*. Je dirai plus ; la démonstration de ce dernier théorème est à la portée d'un petit nombre d'esprits, et les savans eux-mêmes ne sont pas tous d'accord sur l'étendue qu'on doit lui attribuer ; tandis que tout le monde sait fort bien par qui la France a été gouvernée dans le dix-septième siècle, et qu'il ne peut s'élever à ce sujet aucune contestation raisonnable. Ce que je dis ici d'un fait historique peut s'appliquer également à une foule de questions, en religion, en morale, en politique. Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral.

En terminant cette Introduction, je ne puis me dispenser de reconnaître que les lumières et les conseils de plusieurs personnes m'ont été fort utiles, particulièrement ceux de MM. *Poisson*, *Ampère* et *Coriolis*. Je dois à ce dernier, entre autres choses, la règle sur la convergence des produits composés d'un nombre infini de facteurs, et j'ai profité plusieurs fois des observations de M. *Ampère*, ainsi que des méthodes qu'il développe dans ses Leçons d'analyse.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

PRÉLIMINAIRES DU COURS D'ANALYSE.

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
10.	12.	$((a))^{\pm\frac{m}{n}}$	$((a))^{\frac{m}{n}}$
14.	1.	la limite 1,	la limite zéro,
32.	2.	α^n.	$a\,\alpha^n$
33.	19.	$\frac{1}{\alpha^m}$	$\frac{a}{\alpha^m}$
46.	11.	a^a	x^a
71.	14.	k^{n-1}.	k_{n-1}.
83.	22.	$\frac{\left(\frac{z}{x}\right)}{\left(\ \ x\right)}$;	$\frac{\left(\frac{z}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)}$;
100.	19.	$\frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{1.2.2\ldots(n-1)}$	$\frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$
101.	4.	$\frac{y}{1}$	$\frac{y}{2}$
Ibid.	13.	$\frac{x^{n-2}}{1.2.2\ldots(n-2)}$	$\frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}$
126.	17.	supérieure	inférieure
177.	17.	$(\alpha\delta+\beta\gamma\sqrt{-1})$.	$(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}$.
237.	7 et 10.	$\left(\frac{m+1}{2}\right)$	$\left(\frac{m+3}{2}\right)$
260.	5.	$=\beta_{n-1}\sqrt{-1}$	$-\beta_{n-1}\sqrt{-1}$
266.	17.	$\varpi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$	$\varpi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$
278.	2.	$\frac{1-z\cos.\theta}{1-2z\cos.\theta+z^2}$	$\frac{z\sin.\theta}{1-2z\cos.\theta+z^2}$
302.	9.	$\frac{x}{1.2}$	$\frac{x^2}{1.2}$

PAGES.	LIGNES.	FAUTES.	CORRECTIONS.
305.	18.	$z = -_1$	$z = -1$
310.	7.	$-\cos. x - \sqrt{-1}\,\sin. x,$	$= \cos. x - \sqrt{-1}\,\sin. x,$
317.	3.	$\theta\sqrt{1-}$	$\theta\sqrt{-1}$
320.	7.	$\left(\text{arc tang.}\,\frac{\beta -}{-\alpha}\right)\sqrt{-1}$	$\left(\text{arc tang.}\,\frac{-\beta}{-\alpha}\right)\sqrt{-1}$
387.	19.	$\frac{1}{2\beta\sqrt{}}$	$\frac{1}{2\beta\sqrt{-1}}$
443.	9.	du 4.e théorème	du 6.e théorème
445.	22.	H	K
526.	12.	$X_0^2,\ X_1^2,\ X_2^2$	$X_0,\ X_1,\ X_2$
536.	9.	$n + m' - 1$	$n + m - 1$
574.	16.	$\frac{e^{2v} + e^{2v}}{2}$	$\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{2}$