LEÇONS

SUR LES

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

INTRODUCTION.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS [1].

1. *Les deux espèces de points de discontinuité.* — Parmi les discontinuités que peut présenter une fonction $f(x)$, d'une seule variable réelle, il y a lieu de distinguer un mode simple de discontinuité qui se rencontrera souvent dans la suite.

x_0 est *point de discontinuité de première espèce* pour $f(x)$ si, quand x croît vers x_0, $f(x)$ tend vers une limite bien déterminée qu'on notera, avec Dirichlet, $f(x_0 - 0)$ et si, quand x décroît vers x_0, $f(x)$ a une limite qu'on notera $f(x_0 + 0)$ [2].

La propriété essentielle des points de discontinuité de première espèce est d'être toujours comparables entre eux; j'entends par là que, si φ a, en x_0, un point de discontinuité de première espèce pour lequel $\varphi(x_0+0)$ et $\varphi(x_0-0)$ diffèrent, quelle que soit f, admettant aussi x_0 comme point de discontinuité de première

[1] Dans cette Introduction j'ai réuni un certain nombre de définitions ou d'énoncés qu'il importe de connaître pour bien comprendre le reste de l'ouvrage. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de lire ce Chapitre préliminaire avant les autres; il suffirait que le lecteur s'y reportât s'il lui arrivait d'être arrêté par quelque difficulté. J'ai mis dans le texte de nombreux renvois à l'Introduction.

[2] Pour abréger on écrira $f(+0)$ et $f(-0)$ à la place de $f(0+0)$, $f(0-0)$.

espèce, on pourra toujours trouver la constante K de manière que pour $F = f + K\varphi$ on ait $F(x_0 + 0) = F(x_0 - 0)$. C'est-à-dire que, au point x_0, il ne subsiste plus qu'une discontinuité en quelque sorte artificielle. Rien de pareil n'existe pour les autres points de discontinuité qu'on appelle *points de discontinuité de seconde espèce.*

Cette propriété permet, dans certains cas, de conclure pour tous les points de première espèce en s'appuyant sur l'étude d'un point de première espèce particulier (n° 31).

2. *Points réguliers.* — Nous dirons que x_0 est un point régulier pour f si $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$ existent et sont tels que

$$f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) = 2f(x_0);$$

tous les points de continuité sont des points réguliers.

Tous les points réguliers sont comparables au sens du numéro précédent; la discontinuité artificielle dont il a été parlé n'existe même plus. La propriété de ces points qui nous servira le plus est la suivante : la fonction $\varphi(t)$ définie par l'égalité

$$\varphi(t) = f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t) - 2f(x_0),$$

est continue pour $t = 0$.

3. *Fonctions monotones; conditions de Dirichlet.* — On dit que $f(x)$ est une fonction partout non décroissante ou, plus brièvement, que $f(x)$ est une fonction croissante si, quels que soient x_1 et x_2, on a

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geqq 0.$$

$f(x)$ ne décroissant jamais, quand x croît, et ne croissant jamais quand x décroît, $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$ existent toujours; une fonction croissante n'a donc jamais de points de discontinuité de seconde espèce. Ses points de discontinuité forment d'ailleurs toujours un ensemble dénombrable, car, si l'on a

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b,$$

on a aussi

$$f(b) - f(a) \geqq [f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)] \\ + [f(x_2 + 0) - f(x_2 - 0)] + \ldots + [f(x_n + 0) - f(x_n - 0)],$$

et cela montre que les points en lesquels la différence

$$f(x+0)-f(x-0)$$

surpasse ε sont, quel que soit $\varepsilon > 0$, en nombre fini.

Les fonctions décroissantes, qu'on obtient en changeant x en $-x$ dans les fonctions croissantes, jouissent évidemment de propriétés analogues. Les fonctions croissantes et décroissantes constituent l'ensemble des *fonctions monotones*.

On dit qu'une fonction bornée satisfait aux *conditions de Dirichlet* si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité dans l'intervalle (a, b) qu'on considère et si cet intervalle peut être partagé en un nombre *fini* d'intervalles partiels dans chacun desquels la fonction est monotone. Une telle fonction n'a évidemment que des points de discontinuité de première espèce.

4. *Fonctions à variation bornée.* — M. Jordan a appelé ainsi toutes les fonctions bornées qu'on peut obtenir en faisant la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ou, si l'on veut, en faisant la différence de deux fonctions croissantes.

Une telle fonction n'a tout au plus qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité, qui sont de première espèce, et l'on peut remarquer qu'il suffit de modifier la fonction tout au plus en ses points de discontinuité pour que tous ses points soient réguliers.

On peut encore dire qu'une fonction f est à variation bornée si elle varie moins vite qu'une fonction croissante bornée, entendant par là qu'il existe une fonction croissante bornée F telle que l'on ait toujours, pour $h > 0$,

$$F(x+h)-F(x) \geqq |f(x+h)-f(x)|.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, f est la différence des deux fonctions croissantes F et $F-f$, et d'autre part, si f est la différence des deux fonctions croissantes φ et ψ, elle croît moins vite que $\varphi+\psi$. Cette seconde définition est souvent commode, elle montre en particulier qu'une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet est à variation bornée.

f étant à variation bornée, on peut, d'une infinité de manières, écrire, pour $x > a$,

$$f(x) = f(a) + \mathrm{P}(x) - \mathrm{N}(x),$$

$\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{N}(x)$ étant deux fonctions non négatives et croissantes. Soient $p(x)$ et $n(x)$ les limites inférieures, pour x donné, des valeurs de $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{N}(x)$; on a évidemment

$$f(x) = f(a) + p(x) - n(x);$$

$p(x)$ et $n(x)$ sont les plus petites fonctions $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{N}(x)$.

Ces quantités $p(x)$ et $n(x)$ s'appellent les *variations totales positive et négative* de f dans (a, x); $v(x) = p(x) + n(x)$ est la *variation totale* de f dans (a, x); elle est au plus égale à $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.

Il est évident que les deux différences $p(x_0) - p(x_0 - 0)$ et $n(x_0) - n(x_0 - 0)$ ne peuvent être différentes de o en même temps, sans quoi, en appelant d la plus petite des deux, les fonctions $p_1(x)$ et $n_1(x)$, égales à $p(x)$ et $n(x)$ pour $x < x_0$ et à $p(x) - d$, $n(x) - d$ pour $x \geqq x_0$, seraient des fonctions P et N plus petites que p et n. De même les différences $p(x_0 + 0) - p(x_0)$, $n(x_0 + 0) - n(x_0)$ ne peuvent différer de o en même temps et, comme ces différences sont égales deux à deux quand x_0 est point de continuité pour f, on en déduit que, pour un tel point, $p(x)$, $n(x)$ et $v(x)$ sont continues.

Il est facile de voir que la somme, la différence, le produit de deux fonctions à variation bornée est à variation bornée; cela est vrai aussi pour le quotient de deux fonctions pourvu que le module du dénominateur ne descende pas au-dessous d'une certaine limite différente de zéro. J'examine seulement le cas du produit; en conservant les notations précédentes et en affectant de l'indice 1 les quantités relatives à une seconde fonction, on a

$$\begin{aligned} ff_1 &= [f(a) + p - n][f_1(a) + p_1 - n_1] \\ &= pp_1 + nn_1 + p_1 f(a) + p f_1(a) - [pn_1 + np_1 + n_1 f(a) + n f_1(a)], \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété et fait voir en même temps que la variation totale du produit est au plus égale à

$$[v + |f(a)|][v_1 + |f_1(a)|].$$

C'est une expression qui nous servira plus loin; mais nous y remplacerons l'origine a de (a, x) par l'extrémité x, ce qui est évidemment permis (¹).

5. *Nombres dérivés.* — On appelle *nombres dérivés* de la fonction continue f au point x, les plus petites et plus grandes limites vers lesquelles tendent le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, quand on fait tendre h vers zéro positivement d'une part, négativement d'autre part. Ainsi, en chaque point, une fonction continue a quatre nombres dérivés finis ou non. Lorsque ces quatre nombres sont finis et égaux, $f(x)$ *a une dérivée*, au sens ordinaire, égale à ces nombres dérivés.

Les fonctions f, qui satisfont à la condition, si connue dans la théorie des équations différentielles sous le nom de *condition de Lipschitz*, qui s'exprime par l'inégalité

$$|f(x+h)-f(x)| < k\,|h|,$$

où k est une constante, ont évidemment leurs nombres dérivés bornés; la réciproque est vraie (²).

6. *Dérivée seconde généralisée. Théorème de M. Schwarz.* — D'autres généralisations de la notion de dérivée pourraient être utiles. C'est ainsi que, pour le n° 37, il y aurait avantage à définir la dérivée de f en x par la considération du rapport $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ au lieu du rapport ordinaire; cela conduit à une définition de la dérivée, qui comprend la définition classique comme cas particulier, mais qui est plus générale puisque, par exemple, elle conduit à attribuer une dérivée nulle à $+\sqrt{x^2}$ pour $x = 0$. Je n'insiste pas sur ce point et j'indique une généralisation plus importante.

La dérivée première est définie comme la limite du rapport de la différence première de f à l'accroissement de la variable; consi-

(¹) Pour plus de renseignements sur les fonctions à variation bornée voir le Tome I de la deuxième édition du *Cours d'Analyse* de M. Jordan ou le Chapitre IV de mes *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives*.

(²) *Voir* mes *Leçons sur l'Intégration*, p. 72.

Cambridge University Press
978-1-108-00192-2 - Lecons Sur Les Series Trigonometriques Professees au College de France
Henri Lebesgue
Excerpt
More information

dérons maintenant le rapport de la différence seconde de f au carré de l'accroissement de la variable. Ce rapport s'écrit [1] :

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2} = \frac{[f(x+h)-f(x)]+[f(x-h)-f(x)]}{h^2}$$
$$= \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Quand la dérivée seconde ordinaire existe, elle est la limite du rapport précédent, pour $h = 0$; mais il se peut que cette dérivée seconde n'existe pas et que la limite existe. Ce serait le cas, pour $x = 0$, si f était une fonction continue sans dérivée première telle que $f(h) = -f(-h)$. On convient d'appeler *dérivée seconde généralisée* la limite de $\frac{\Delta^2 f}{h^2}$, toutes les fois qu'elle existe.

Remarquons que cette dérivée seconde généralisée est, d'après la première forme du rapport $\frac{\Delta^2 f}{h^2}$, positive ou nulle en tout point x où f est maximum ; cela va nous servir à démontrer une propriété analogue au théorème des accroissements finis : *si la fonction f a en tout point une dérivée seconde généralisée φ, la quantité $\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}$ est comprise entre les limites inférieure et supérieure de φ dans $(x_0 - h,\ x_0 + h)$.*

Il suffira, par exemple, de démontrer que $\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}$ ne surpasse pas la limite supérieure de φ. Posons

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}(x-x_0)^2 + \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}(x-x_0)+f(x_0);$$

la fonction continue $\lambda(x) = f(x) - \psi(x)$ s'annule pour $x_0 - h$, x_0, $x_0 + h$, donc elle atteint son maximum pour une valeur x_1 *intérieure* à $(x_0 - h, x_0 + h)$; x_1 pourra, d'ailleurs, égaler x_0. La dérivée seconde d'un trinome du second degré étant constante, on a

$$\frac{\Delta^2 \lambda(x)}{h^2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} - \frac{\Delta^2 \psi(x)}{h^2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} - \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2},$$

---

[1] En réalité, si l'on prend les différences à la façon ordinaire, on est conduit au rapport $\frac{f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)}{h^2}$ qui conduit à une définition non équivalente à celle du texte.

d'où

$$\frac{\Delta^2 f(x_1)}{k^2} = \frac{\Delta^2 \lambda(x_1)}{k^2} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2};$$

d'après notre remarque la limite du second membre, pour $k = 0$, est au moins $\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}$, donc on a

$$\varphi(x_1) \geqq \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}.$$

Le théorème est démontré.

Supposons, en particulier, que φ soit constamment nulle; alors $\Delta^2 f(x_0)$ est constamment nulle. Quels que soient x, x_1, h, on a donc

$$f(x_1 + h) + f(x) - 2f\left(\frac{x + x_1 + h}{2}\right) = 0,$$

$$f(x_1) + f(x + h) - 2f\left(\frac{x + x_1 + h}{2}\right) = 0.$$

C'est dire que les deux différences $f(x_1 + h) - f(x_1)$ et $f(x + h) - f(x)$ sont égales ou, en d'autres termes, que $f(x)$ s'accroît de quantités égales quand la variable s'accroît toujours de la même quantité. D'après un raisonnement bien connu et qu'on développe ordinairement à l'occasion du mouvement uniforme on doit conclure de là que f est une fonction linéaire. D'où le théorème de M. Schwarz : *les seules fonctions continues qui ont une dérivée seconde généralisée constamment nulle sont les fonctions linéaires*. La dérivée d'une différence étant la différence des dérivées, on peut encore dire : *deux fonctions continues dont les dérivées secondes généralisées sont partout finies et égales ne diffèrent que par une fonction linéaire*. Cela fixe le degré d'indétermination du problème qui consiste à chercher une fonction connaissant sa dérivée seconde généralisée; ce problème sera étudié au Chapitre V.

7. *Ensembles de points*. — C'est à l'occasion de la théorie des séries trigonométriques (*voir* n° 61) que M. G. Cantor a commencé l'étude des ensembles de points. Je me contenterai de rappeler ici un certain nombre des définitions posées par M. Cantor, renvoyant pour une étude plus complète à la Note qui termine mes *Leçons sur l'Intégration*.

Un point P est *point limite* de l'ensemble E si tout domaine (¹), contenant P à son intérieur, contient aussi des points de E. L'ensemble des points limites de E constitue le *dérivé* E′ de E. Le dérivé E″ de E′ est le second dérivé de E. On forme ainsi une suite finie ou même transfinie de dérivés. Si l'un d'eux ne contient aucun point, E est dit *réductible*.

8. *Ensembles mesurables; fonctions mesurables* (²). — Appelons *intervalle* les domaines spéciaux obtenus en assujettissant chacune des coordonnées à une inégalité telle que $a_i < x_i < b_i$. La mesure d'un tel intervalle, les axes étant rectangulaires, est par définition le produit des différences $(b_i - a_i)$.

Soit E un ensemble de points tous contenus à l'intérieur d'un intervalle I. Enfermons les points de E dans une infinité dénombrable d'intervalles i et soit α la limite inférieure de la somme des mesures des i quand on choisit ces intervalles de toutes les manières possibles. Soit β la limite analogue relative à l'ensemble des points de I ne faisant pas partie de E. Si $\alpha + \beta$ est égale à la mesure de I, E est dit *mesurable* et sa *mesure* est égale à α. La mesure d'un ensemble ne dépend ni des axes de coordonnées ni, ce qui est la même chose, de la position de l'ensemble par rapport à ces axes.

L'ensemble somme de E et de E_1, c'est-à-dire celui qui est formé à l'aide des points de E et de E_1, est mesurable si E et E_1 le sont. La mesure de $E + E_1$ est la somme des mesures de E et de E_1, si E et E_1 n'ont pas de point commun. Ce théorème s'étend à la somme d'un nombre fini quelconque d'ensembles et même à la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles.

Si l'on considère les ensembles mesurables E_1, E_2, ... en nombre fini ou dénombrable, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points appartenant à la fois à tous les E_i est aussi dénombrable; sa mesure est la limite inférieure des mesures des E_i dans le cas particulier où chaque ensemble E_i contient les ensembles d'indices plus grands, E_{i+1}, E_{i+2}, ...

(¹) Il s'agit ici des points d'un espace ayant un nombre quelconque de dimensions.

(²) Pour les démonstrations, voir mes *Leçons sur l'Intégration*, Chap. III et VII.

A l'aide de ces énoncés on s'assurera facilement que tous les ensembles actuellement connus sont mesurables.

On dit qu'une fonction f d'une ou plusieurs variables, définie dans un certain intervalle, est mesurable si, quels que soient a et b, l'ensemble des points pour lesquels on a $a < f < b$ est mesurable. Les fonctions continues sont évidemment mesurables, puisque, pour les fonctions continues, les ensembles considérés peuvent être obtenus en formant des sommes d'intervalles. De même, les fonctions croissantes sont mesurables, donc les fonctions à variation bornée le sont aussi, car la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont des fonctions mesurables; la limite d'une suite de fonctions mesurables est mesurable. Démontrons, par exemple, cette dernière propriété; soit f la limite des fonctions mesurables $f_1, f_2, \ldots$. Désignons par E_n l'ensemble des points en lesquels on a $a < f_n < b$; E_n est mesurable. Soit E^n l'ensemble, mesurable, des points communs à $E_n, E_{n+1}, E_{n+2}, \ldots$. Soit enfin E la somme $E^1 + E^2 + \ldots$; il est évident que E est mesurable, et c'est l'ensemble des points en lesquels on a $a < f < b$.

De là résulte, en particulier, qu'une série trigonométrique convergente ne peut représenter qu'une fonction mesurable; d'ailleurs, toutes les fonctions actuellement connues sont mesurables.

9. *Théorème sur la convergence des séries.* — Soit une suite $f_1, f_2, \ldots$ de fonctions mesurables, l'ensemble des points où elle converge est mesurable. On obtient, en effet, cet ensemble $\mathcal{E}$ par le procédé suivant. On forme les ensembles $E_{n,p,N}$ à l'aide des points en lesquels on a $|f_n - f_{n+p}| < \frac{1}{N}$; on prend les points communs à tous les ensembles $E_{n,p,N}$, ayant les mêmes indices n et N, ils forment un ensemble $E_{n,N}$; on forme les sommes E_N de tous les ensembles $E_{n,N}$ ayant N pour second indice; on prend enfin l'ensemble $\mathcal{E}$ des points communs à tous les E_N, où N est entier. Tous les $E_{n,p,N}$, $E_{n,N}$, E_N, $\mathcal{E}$ sont mesurables.

Ceci posé, soient e_p l'ensemble mesurable des points en lesquels on a $|f_p - f| < \varepsilon$ et $\mathcal{E}_p$ l'ensemble mesurable des points communs à $e_p, e_{p+1}, \ldots$. L'ensemble mesurable $\mathcal{E}_1 + (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2) + \ldots$ contient $\mathcal{E}$, il est formé d'ensembles sans point commun, donc, en prenant dans la série précédente un nombre n, suffisamment grand de termes, on a un ensemble somme (qui n'est autre que $\mathcal{E}_p$) dont la mesure est au moins égale à celle de $\mathcal{E}$.

De ce raisonnement général tirons deux énoncés particuliers qu'on utilisera plus loin [1]. Pour cela remarquons que f est la somme de la série convergente $f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots$.

Pour les points de $\mathcal{E}_n$ tous les restes de cette série, à partir du $n^{\text{ième}}$, sont inférieurs en valeur absolue à ε, et tous les termes, à partir du $n^{\text{ième}}$, sont inférieurs en valeur absolue à 2ε. Donc : *si une série de fonctions mesurables converge en tous les points d'un intervalle, les points de cet intervalle pour lesquels l'un des restes, à partir du $n^{\text{ième}}$, n'est pas inférieur à $\varepsilon > 0$, en valeur absolue, est de mesure aussi petite que l'on veut, à condition de prendre n assez grand;* ou encore : *Soit Γ_n l'ensemble des points en lesquels le $n^{\text{ième}}$ terme d'une série de fonctions mesurables ne surpasse pas, en valeur absolue, un nombre positif 2ε; s'il existe une infinité d'ensembles Γ_n dont la mesure ne surpasse pas η, on peut affirmer que la mesure de l'ensemble des points de convergence est au plus égale à η.*

10. *Définition de l'intégrale.* — Soit f une fonction mesurable; divisons l'intervalle à une dimension $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles partiels à l'aide de nombres croissants l_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$ d'une part, $-1, -2, \ldots$ d'autre part), tels que $l_{i+1} - l_i$ ne surpasse jamais η. Soit e_i la mesure de l'ensemble des points en lesquels on a

$$l_i \leqq f < l_{i+1} \text{ [2]:}$$

formons la série infinie dans les deux sens

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} l_i e_i = \mathrm{A}.$$

---

(1) Pour un autre énoncé *voir* LEBESGUE, *Sur une propriété des fonctions* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 décembre 1904).

(2) Cet ensemble est mesurable, car il est formé des points qui appartiennent, quel que soit l'entier n, à l'ensemble des points en lesquels on a

$$l_i - \frac{1}{n} < f < l_{i+1}.$$