LEÇONS SUR L'INTÉGRATION ET LA RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES.

CHAPITRE I.

L'INTÉGRALE AVANT RIEMANN.

I. — *L'intégration des fonctions continues.*

L'intégration a été définie tout d'abord comme l'opération inverse de la dérivation; c'est l'opération permettant de résoudre le problème des fonctions primitives :

Trouver les fonctions F(x) *qui admettent pour dérivée une fonction donnée* $f(x)$.

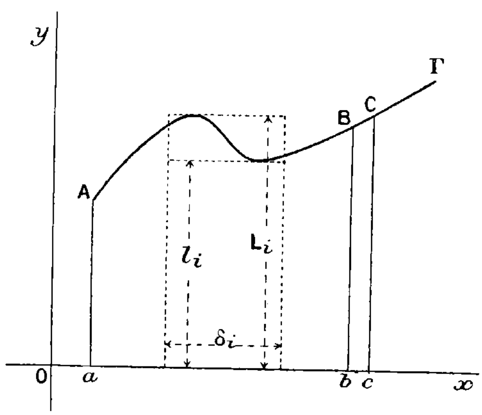
On sait que, si ce problème est possible, il l'est d'une infinité de manières, et que toutes les fonctions primitives F(x) d'une même fonction $f(x)$ ne diffèrent que par une constante additive. Ce qu'on se propose, c'est de trouver l'une quelconque des fonctions F(x).
A l'époque où le problème des fonctions primitives fut posé sous la forme que j'indique, c'est-à-dire à l'époque de Newton et de Leibnitz, le mot *fonction* avait un sens assez mal défini. On appelait ainsi, le plus souvent, une quantité y liée à la variable x par une équation où intervenait un certain nombre des symboles

d'opérations que l'on avait l'habitude de considérer. Les principales de ces opérations étaient : les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines), les opérations trigonométriques (avec les signes sin, cos, tang, arc sin, arc cos, arc tang), les opérations logarithmiques et exponentielles (avec les signes log, a^x).

Pour un grand nombre de fonctions exprimées de cette manière on avait pu exprimer, de la même manière, les fonctions primitives, de sorte qu'il apparaissait comme certain que toute fonction admet une fonction primitive. D'ailleurs on pouvait répondre à qui doutait de cette proposition.

Soit (*fig.* 1) la courbe Γ, $y = f(x)$, représentant la fonction

Fig. 1.



donnée $f(x)$; les axes sont rectangulaires. Supposons pour simplifier $f(x)$ positive ; soient aA, bB deux parallèles à l'axe des y, d'abscisses a et x. Ces deux parallèles, l'arc AB de Γ, le segment ab de Ox, limitent un domaine d'aire S(x). En évaluant l'accroissement bBCc de cette aire, on voit que $f(x)$ est la dérivée de S(x) [1].

Remarquons que dans les considérations précédentes le mot *fonction* a déjà reçu une extension considérable. La relation entre S(x) et x est en effet une relation géométrique et non plus une

[1] Pour la démonstration et pour le cas où $f(x)$ n'est pas toujours positive voir GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, Chap. IV, ou HUMBERT, *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique*, t. I, 2e Partie, Chap. III.

relation algébrique-trigonométrique-logarithmique. De telles relations étaient encore considérées comme définissant des fonctions; seulement, on distinguait soigneusement entre les figures géométriques définies à l'aide de lois exprimables par des égalités géométriques et les figures qui n'étaient pas définies ainsi. Les courbes $y = f(x)$ de la première espèce ou courbes géométriques définissaient des fonctions $f(x)$; les courbes de la seconde espèce ou courbes arbitraires ne définissaient pas de vraies fonctions. Lorsqu'on employait le mot *fonction* pour ces deux espèces de correspondance entre y et x, on distinguait les premières en les appelant *fonctions continues* (1).

Il y avait aussi une catégorie intermédiaire de fonctions, celles qui étaient représentées à l'aide de plusieurs arcs de courbes géométriques; on les considérait plus volontiers comme formées de parties de fonctions.

Les fonctions *continues* étaient les vraies fonctions. On donnait ainsi au mot *fonction* un sens assez restreint parce qu'on croyait que toute fonction continue, définie géométriquement ou non, était susceptible d'une définition analytique, de la nature de celles dont il a été parlé précédemment, et qu'on croyait cela impossible pour les fonctions non continues.

Mais Fourier montra que les séries trigonométriques, qui pouvaient être employées dans des cas étendus à la représentation des fonctions continues, pouvaient servir aussi à la représentation de fonctions non continues formées de parties de fonctions. En particulier une fonction nulle de 0 à π, égale à 1 de π à 2π, admet un développement trigonométrique convergent. Le seul critère, permettant de distinguer les vraies fonctions des fausses, disparaissait. Il fallait, ou bien étendre le sens du mot *fonction*, ou bien restreindre la catégorie des expressions algébriques, trigonométriques, exponentielles qui pouvaient servir à définir des fonctions.

Cauchy remarqua que les difficultés qui résultent des recherches de Fourier se présentent même lorsqu'on ne se sert que d'expressions très simples, c'est-à-dire que, suivant le procédé employé pour donner une fonction, elle apparaît comme continue ou

(1) Cette continuité est connue sous le nom de *continuité eulérienne*.

non. Cauchy cite, comme exemple, la fonction égale à $+x$ pour x positif, à $-x$ pour x négatif. Cette fonction n'est pas continue, elle est formée de parties des deux fonctions continues $+x$ et $-x$; elle apparaît au contraire comme continue quand on la note $+\sqrt{x^2}$.

Pour conserver aux mots *fonction continue* leur sens primitif, il aurait donc fallu ne considérer que des expressions analytiques très particulières [1]; Cauchy préféra modifier considérablement les définitions.

Pour Cauchy *y est fonction de x quand, à chacun des états de grandeur de x, correspond un état de grandeur parfaitement déterminé de y.*

Cette définition paraît la même que celle donnée plus tard par Riemann, mais en réalité les correspondances que Cauchy considère sont encore celles qu'on peut établir à l'aide d'expressions analytiques, car, après avoir défini les fonctions, Cauchy ajoute : les fonctions sont dites explicites si l'équation qui lie x à y est résolue en y, et implicites si cela n'a pas lieu. Le fait que les correspondances sont établies à l'aide d'expressions analytiques n'intervient jamais dans les raisonnements de Cauchy, de sorte que les propriétés obtenues par Cauchy s'appliquent immédiatement ainsi que leurs démonstrations aux fonctions satisfaisant à la définition de Riemann [2].

Pour Cauchy *une fonction $f(x)$ est continue pour la valeur x_0 si, quel que soit le nombre positif ε, on peut trouver un nombre*

---

[1] C'est ce que fait M. Méray qui donne au mot *fonction* un sens très voisin de celui qu'on donnait autrefois aux mots *fonction continue*. M. Méray définit les fonctions par les séries de Taylor et le prolongement analytique; lorsqu'on adopte les définitions de M. Méray, l'existence des fonctions primitives résulte immédiatement des propriétés des séries entières.

Mais, si l'on applique les définitions de M. Méray aux fonctions de la variable complexe, on se trouve conduit nécessairement, comme me l'a fait remarquer M. Borel, à considérer des fonctions discontinues d'une variable réelle. Par exemple, lorsqu'une série de Taylor est convergente sur son cercle de convergence, ses valeurs, sur ce cercle, peuvent définir deux fonctions réelles discontinues de l'argument.

[2] Je ne veux pas dire que la définition de Cauchy soit moins générale que celle de Riemann; on ne connaît actuellement aucune fonction riemannienne qui n'admette pas de représentation analytique. Seulement, s'il existe des fonctions qui satisfont à la définition de Riemann, sans satisfaire à celle de Cauchy, elles ne seront pas exclues des raisonnements.

$\eta(\varepsilon)$ tel que l'inégalité $|h| \leqq \eta(\varepsilon)$ entraîne

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqq \varepsilon;$$

la fonction $f(x)$ est continue dans (a, b) si la correspondance entre ε et $\eta(\varepsilon)$ peut être choisie indépendamment du nombre x_0, quelconque dans (a, b).

On reconnaît là les définitions aujourd'hui classiques.

Pour démontrer l'existence des fonctions primitives des fonctions continues, il suffit de reprendre la démonstration géométrique indiquée précédemment. Dans cette démonstration on a fait appel à la notion d'aire. Cette notion, déjà assez peu claire lorsqu'il s'agit de domaines limités par des courbes géométriques simples comme le cercle ou l'ellipse, le devient moins encore lorsqu'il s'agit des domaines intervenant dans la démonstration qui nous occupe.

Les courbes Γ qui limitent ces domaines ne sont plus nécessairement des courbes géométriques, elles peuvent être formées de parties de courbes géométriques $(y=+\sqrt{x^2})$; on sait donc qu'elles peuvent être compliquées sans savoir où s'arrête cette complication. Aussi Cauchy crut devoir préciser ce que l'on doit entendre par le nombre $S(x)$ de la démonstration précédente [1]; il lui suffit pour cela de reprendre les opérations qui servaient ordinairement à calculer des valeurs approchées de $S(x)$ considérée comme aire et de démontrer que ces calculs conduisaient à un nombre limite. On a ainsi la démonstration maintenant classique de l'existence des fonctions primitives.

Soit (a, X) l'intervalle que nous considérons. Divisons (a, X) en intervalles partiels à l'aide des nombres croissants

$$a_0=a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n=X;$$

et formons la somme

$$S=(a_1-a_0)f(x_1)+(a_2-a_1)f(x_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(x_n),$$

où x_i est un nombre quelconque compris entre a_{i-1} et a_i. On démontre que S tend vers un nombre déterminé $S(X)$ quand le

(1) C'est-à-dire qu'il crut devoir définir l'aire d'une façon précise.

maximum de $a_{i-1} - a_i$ tend vers zéro d'une manière quelconque [1].

Le nombre $S(X)$ ainsi obtenu s'appelle l'*intégrale définie* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, X). Depuis Fourier, on le représente par la notation $\int_a^X f(x)\,dx$.

Ce symbole n'a jusqu'à présent de sens que dans les intervalles positifs (a, X), $(X \geqq a)$; par définition, on pose

$$\int_a^X f(x)\,dx + \int_X^a f(x)\,dx = 0.$$

Il est évident que l'on a, quels que soient a, b, c,

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0.$$

Remarquons encore que si L et l sont les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans (a, b), $\int_a^b f(x)\,dx$ est comprise entre $L(b-a)$ et $l(b-a)$. La fonction continue $f(x)$ prenant toutes les valeurs entre l et L, y compris les valeurs l et L, on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi),$$

ξ étant compris entre a et b [2], c'est le théorème des accroissements finis.

Le nombre $S(X)$ étant maintenant défini d'une manière précise, on démontre l'existence de la fonction primitive de $f(x)$ sans difficulté. En effet, on a

$$\frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(x_0 + \theta h),$$

égalité qui démontre que la fonction $S(x)$ est continue et a pour dérivée $f(x)$.

---

(1) *Voir*, par exemple, les deux Ouvrages cités page 2 ou le Tome I du *Traité d'Analyse* de M. Picard.

(2) Cette démonstration n'exclut pas les égalités $\xi = a$, $\xi = b$. Dans certains cas il est bon de prévoir qu'on peut choisir ξ différent de a et b; la démonstration est immédiate.

La fonction S(X) qui figure dans la démonstration précédente ou plus exactement la fonction

$$S(X)+K = K + \int_a^X f(x)\,dx = K_1 + \int_\alpha^X f(x)\,dx,$$

dans laquelle K et K_1 sont des constantes quelconques et α une valeur de x prise dans l'intervalle où $f(x)$ est définie, s'appelle l'*intégrale indéfinie* de la fonction $f(x)$ et se note $\int f(x)\,dx$. On voit que l'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ est la fonction F(x) la plus générale telle que l'on ait, quels que soient α et β dans l'intervalle où $f(x)$ est définie,

$$(1)\qquad F(\beta)-F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

On voit aussi que, pour les fonctions continues, il y a identité entre les intégrales indéfinies et les fonctions primitives [1].

II. — *L'intégration des fonctions discontinues.*

Dans ce qui précède, l'intégrale définie apparaît comme un élément permettant de calculer la fonction primitive; dans la pratique, les fonctions primitives servent, au contraire, au calcul des intégrales définies. Ces intégrales définies, qui sont des limites de sommes dont le nombre des termes augmente indéfiniment tandis que la valeur absolue de ces termes tend vers zéro, se rencontrent dans un grand nombre de questions d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique [2]. Pour le calcul de certaines de ces

[1] Cela ne serait plus vrai si l'on n'introduisait pas la constante K dans la définition de l'intégrale indéfinie.

[2] L'application la plus simple de la notion d'intégrale est la quadrature des domaines plans. A cause de cette application, on a fait souvent remonter la notion d'intégrale définie à Archimède et à la quadrature de la parabole. Il est vrai que beaucoup de quadratures ont été effectuées avant l'introduction du Calcul intégral, mais les géomètres n'attachaient aucune importance particulière aux domaines bien spéciaux dont il faut calculer les aires pour avoir des intégrales définies. L'importance de ces domaines n'est apparue qu'après l'introduction de la notion de dérivée.

limites de sommes, par exemple pour la définition et le calcul de l'aire comprise entre une courbe et son asymptote, l'intégration des fonctions continues ne suffisait plus; on a été ainsi conduit à s'occuper de l'intégration des fonctions qui sont infinies en certains points ou au voisinage de certains points. D'autre part, pour certaines applications des intégrales définies, par exemple pour le calcul des coefficients de la série trigonométrique représentant une fonction donnée, il semblait y avoir avantage à définir l'intégrale d'une fonction qui, tout en restant finie, est discontinue en certains points. Aussi, dès l'introduction de la notion d'intégrale définie, a-t-on étendu cette notion à certaines fonctions discontinues.

On a été conduit à la définition qui sera donnée plus loin en posant en principe l'identité, constatée dans le cas des fonctions continues, de l'intégrale indéfinie et de la fonction primitive. Considérons la fonction $f(x)$ qui, pour $x \neq 0$, est égale à $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Les seules fonctions *continues* qui admettent, sauf pour $x = 0$, une dérivée égale à $f(x)$ sont données par la formule $K + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; on a dit que $F(x) = K + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ était l'intégrale indéfinie de $f(x)$, et la formule (1) donnait l'intégrale définie de $f(x)$ dans un intervalle quelconque (α, β).

Soit encore la fonction $f(x)$ (considérée par Fourier) égale à -1 pour x négatif, à $+1$ pour x positif [1]. Les seules fonctions *continues* qui admettent $f(x)$ pour dérivée, sauf pour la valeur singulière $x = 0$, sont les fonctions (considérées par Cauchy) $K + \sqrt{x^2}$; si l'on considère ces fonctions comme des intégrales indéfinies, on en déduit la valeur de l'intégrale définie de $f(x)$ dans tout intervalle [2].

---

(1) Cette fonction, non définie pour $x = 0$, admet, comme on sait, un développement trigonométrique; on peut aussi la noter $\frac{+\sqrt{x^2}}{x}$.

(2) Il est bon d'ajouter que les intégrales définies, que l'on peut ainsi attacher aux deux espèces de fonctions discontinues que l'on vient de considérer, permettent d'exprimer les coefficients du développement trigonométrique des fonctions à l'aide des formules d'Euler et de Fourier qui servent dans le cas des fonctions continues.

Cauchy énonce d'une manière très précise la définition dont on vient de voir deux applications. Pour lui, *si une fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle (a, b), sauf en un point c, au voisinage duquel $f(x)$ est bornée ou non* (¹), *on peut définir l'intégrale de $f(x)$ dans (a, b) si les deux intégrales*

$$\int_a^{c-h} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx$$

tendent vers des limites déterminées quand h tend vers zéro; alors on a par définition

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h=0}\left[\int_a^{c-h} f(x)\,dx + \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx\right] \text{ (²)}.$$

Si dans (a, b) il existe plusieurs points de discontinuité, on partage (a, b) en assez d'intervalles partiels pour que, dans chacun d'eux, il n'existe plus qu'un seul point singulier; on applique à chaque intervalle la définition précédente, si cela est possible; on fait ensuite la somme des nombres ainsi obtenus.

C'est à ces définitions que se rattachent les critères connus relatifs à l'existence des intégrales des fonctions infinies autour d'un point.

Pour des recherches relatives à la théorie des fonctions et en particulier pour l'étude des séries trigonométriques, Lejeune-Dirichlet a étendu la notion d'intégrale. Les recherches de Lejeune-Dirichlet, qu'il avait annoncées lui-même, n'ont jamais été publiées; mais, d'après Lipschitz, on peut les résumer comme il suit.

Soit une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle fini (a, b), dans lequel il faut l'intégrer; soit e l'ensemble des points de

(¹) Cauchy ne se préoccupe pas de la valeur de la fonction pour $x = c$. D'ailleurs, pour lui, si $f(x)$ tend vers une valeur déterminée quand x tend vers c, cette valeur limite est $f(c)$; s'il n'en est pas ainsi, $f(c)$ est l'une quelconque des valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande des limites de $f(x)$. Dans quelques Mémoires, P. du Bois-Reymond a repris ces conventions.

(²) Cauchy s'occupe aussi du cas où le second membre de cette égalité aurait un sens, sans que les deux intégrales qui y figurent aient des limites. Dans ce cas, il appelle ce second membre la *valeur principale de l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$.

discontinuité de $f(x)$. Si e ne contient qu'un nombre fini de points, nous appliquons les définitions de Cauchy.

D'après Lipschitz, le cas qu'étudie Dirichlet est celui où le dérivé e' de e ne contient qu'un nombre fini de points, comme cela se présente, par exemple, pour la fonction $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$, où e' ne contient que $x=0$.

Les points de e' divisent alors (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels, soit (α, β) l'un d'eux. Dans $(\alpha+h, \beta-k)$, il n'y a qu'un nombre fini de points de e. Si dans cet intervalle les définitions de Cauchy ne s'appliquent pas, on dira que la fonction n'a pas d'intégrale dans (a, b). Si au contraire elles s'appliquent, on considère l'intégrale $\int_{\alpha+h}^{\beta-k} f(x)\,dx$ et l'on fait tendre simultanément h et k vers zéro suivant des lois quelconques. Si l'on n'obtient pas une limite déterminée, $f(x)$ n'a pas d'intégrale dans (a, b); si au contraire on a une limite déterminée, on pose

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{h=0,\,k=0} \int_{\alpha+h}^{\beta-k} f(x)\,dx.$$

L'intégrale dans (a, b) est, par définition, la somme des intégrales dans les intervalles (α, β).

On voit que la définition de Dirichlet repose sur les mêmes principes que celle de Cauchy; la définition générale qui découle de ces principes peut s'énoncer ainsi :

Une fonction $f(x)$ a une intégrale dans un intervalle fini (a, b) s'il existe dans (a, b) une fonction continue $F(x)$, et une seule à une constante additive près, telle que l'on ait

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha), \tag{1}$$

dans tout intervalle où $f(x)$ est continue. $F(x)$ est l'intégrale indéfinie de $f(x)$ et l'on a

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pour que cette définition s'applique, il faut d'abord qu'il existe