

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS CET OUVRAGE (*).

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

SECTION PREMIÈRE.

Exposition de l'objet de cet Ouvrage.

ARTICLE I.

Page

1. Objet des recherches théoriques.

2. Exemples divers, armille, cube, sphère, prisme infini; la température variable d'un point quelconque est une fonction des coordonnées de ce point et du temps. — La quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, traverse une surface donnée dans l'intérieur du solide, est aussi une fonction du temps écoulé, et des quantités qui déterminent la forme et la position de la surface. — La théorie a pour objet de découvrir ces fonctions.

ART. 11.

8. Les trois quantités spécifiques qu'il est nécessaire d'observer, sont

^(*) Chaque paragraphe de cette Table indique la matière traitée dans les articles qui sont écrits en tête de ce paragraphe. Le premier de ces articles commence à la page marquée à gauche.



TABLE DES MATIÈRES.

603

Pages.

la capacité, la conducibilité propre, ou perméabilité, et la conducibilité extérieure, ou pénétrabilité. Les coëfficients qui les expriment peuvent d'abord être regardés comme des nombres constants, indépendants des températures.

ART. 12.

9. Premier exposé de la question des températures terrestres.

11. Conditions nécessaires aux applications de la théorie, objet des expériences.

12. Les rayons de chaleur qui sortent d'un même point d'une surface, n'ont point la même intensité. L'intensité de chaque rayon est proportionnelle au cosinus de l'angle que sa direction fait avec la normale à la surface. Remarques diverses, et considérations sur l'objet et l'étendue des questions thermologiques, et sur les rapports de l'analyse générale avec l'étude de la nature.

SECTION II.

Notions générales et définitions préliminaires.

18. Température permanente, thermomètre. La température désignée par o est celle de la glace fondante. Nous désignons par 1 celle de l'ébullition de l'eau dans un vase donné, sous une pression donnée.

ART. 25.

20. L'unité qui sert à mesurer les quantités de chaleur, est la chaleur nécessaire pour résoudre en eau liquide une certaine masse d'eau glacée.

76.



604 TABLE

ART. 26.

Pages.

20. Capacité spécifique de chaleur.

ART. 27, 28, 29.

Ibid. Températures mesurées par les accroissements de volume, ou par les quantités de chaleur ajoutées. — On ne considère ici que les cas où les augmentations de volume sont proportionnelles aux augmentations de la quantité de chaleur. Cette condition n'a point lieu dans les liquides en général; elle est sensiblement vraie pour les corps solides dont les températures diffèrent beaucoup de celles qui causent le changement d'état.

ART. 30.

22. Notion de la conducibilité extérieure.

ART. 31.

1bid. On peut regarder d'abord la quantité de chaleur perdue comme proportionnelle à la température. Cette proposition n'est sensiblement vraie que pour certaines limites de température.

23. La chaleur perdue dans le milieu est formée de plusieurs parties. Cet effet est composé et variable. Chaleur lumineuse.

Авт. 36.

25. Mesure de la conducibilité extérieure.

ART. 37.

Ibid. Notion de la conducibilité propre; on observe aussi cette propriété dans les liquides.

ART. 38, 39.

26. Équilibre des températures. Cet effet est indépendant du contact.



DES MATIÈRES.

605

ART. 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.

Pages.

26. Premières notions de la chaleur rayonnante, et de l'équilibre qui s'établit dans les espaces vides d'air, de la cause qui réfléchit les rayons de la chaleur, ou qui les contient dans les corps, du mode de communication entre les molécules intérieures, de la loi qui règle l'intensité des rayons émis. Cette loi n'est point troublée par la réflexion de la chaleur.

ART. 50, 51.

34. Première notion des effets de la chaleur réfléchie.

ART. 52, 53, 54, 55, 56.

37. Remarques sur les propriétés statiques ou dynamiques de la chaleur. Elle est le principe de toute élasticité, et la force élastique des fluides aériformes indique exactement les températures.

SECTION III.

Principe de la communication de la chaleur.

ART. 57, 58, 59.

39. Lorsque deux molécules d'un même solide sont extrêmement voisines et ont des températures inégales, la molécule plus échauffée communique à celle qui l'est moins une quantité de chaleur exactement exprimée par le produit formé de la durée de l'instant, de la différence extrêmement petite des températures, et d'une certaine fonction de la distance des molécules.

ART. 60.

42. Lorsqu'un corps échauffé est placé dans un milieu aériforme d'une température moins élevée, il perd à chaque instant une quantité de chaleur que l'on peut regarder, dans les premières recherches, comme proportionnelle à l'excès de la température de la surface sur la température du milieu.



606

TABLE

ART. 61, 62, 63, 64.

Pages.

43. Les propositions énoncées dans les deux articles précédents sont fondées sur diverses observations. Le premier objet de la théorie est de découvrir toutes les conséquences exactes de ces propositions. On peut ensuite mesurer les variations des coëfficients, en comparant les résultats du calcul avec des expériences trèsprécises.

SECTION IV.

Du mouvement uniforme et linéaire de la chaleur.

ART. 65.

46. Les températures permanentes d'un solide infini compris entre deux bases parallèles retenues à des températures fixes, sont exprimées par l'équation $\overline{v-a}$. $e=\overline{b-a}$. z; a et b sont les températures des deux plans extrêmes, e leur distance, et v la température de la section, dont la distance au plan inférieur est z.

49. Notion et mesure du flux de la chaleur.

53. Mesure de la conducibilité propre.

55. Remarques sur les cas où l'action directe de la chaleur se porterait à une distance sensible.

ART. 71.

56. État du même solide, lorsque le plan supérieur est exposé à l'air.

ART. 72.

58. Conditions générales du mouvement linéaire de la chaleur.



DES MATIÈRES.

607

SECTION V.

Loi des températures permanentes dens un prisme d'une petite épaisseur.

Pages

60. Équation du mouvement linéaire de la chaleur dans le prisme-Conséquences diverses de cette équation.

SECTION VI.

De l'échauffement des espaces clos.

68. L'état final de l'enceinte solide qui termine l'espace échauffé par une surface b, maintenue à la température α, est exprimée par l'équation suivante:

$$m-n=(\alpha-n)\frac{P}{1+P}$$

La valeur de P est $\frac{\sigma}{S} \cdot \left(\frac{g}{h} + \frac{ge}{K} + \frac{g}{H}\right)$. m est la température de l'air intérieur, n la température de l'air extérieur, g, h, H mesurent respectivement la pénétrabilité de la surface échauffée σ , celle de la surface intérieure de l'enceinte S, et celle de la surface extérieure S, e est l'épaisseur de l'enceinte, et K sa conducibilité propre.

72. Conséquences remarquables de l'équation précédente.

75. Mesure de la quantité de chaleur nécessaire pour retenir à une température constante un corps dont la surface est séparée de l'air extérieur par plusieurs enceintes successives. Effets remar-



608

TABLE

Page:

quables de la séparation des surfaces. Ces conséquences s'appliquent à des questions très-variées.

SECTION VII.

Du mouvement uniforme de la chaleur suivant les trois dimensions.

83. Les températures permanentes d'un solide compris entre six plans rectangulaires sont exprimées par l'équation

$$v = A + ax + by + cz$$
.

x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque, dont v est la température; A, a, b, c sont des nombres constants. Si les plans extrêmes sont retenus par des causes quelconques à des températures fixes qui satisfont à l'équation précédente, le système final de toutes les températures intérieures sera exprimé par la même équation.

86. Mesure du flux de chaleur dans ce prisme.

SECTION VIII.

Mesure du mouvement de la chaleur en un point donné d'une masse solide.

89. On suppose que le système variable des températures d'un solide est exprimé par l'équation v = F(x, y, z, t), où v désigne la température que l'on observerait après le temps écoulé t, au point dont les coordonnées sont x, y, z, et l'on forme l'expression analytique du flux de chaleur dans l'intérieur du solide, suivant une direction donnée.



DES MATIÈRES.

609

ART. 100.

Pages.

95. Application du théorême précédent au cas où la fonction F est e^{-gt} . cos. $x \cos x \cos x \cos z$.

CHAPITRE II.

Équation du mouvement de la chaleur.

SECTION PREMIÈRE.

Équation du mouvement varié de la chaleur dans une armille.

ARTICLES 101, 102, 103, 104, 105.

99. Le mouvement variable de la chaleur dans l'armille, est exprimé par l'équation

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{h l}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}} \cdot v.$$

L'arc x mesure la distance d'une tranche à l'origine o; v est la température que cette tranche acquiert après le temps écoulé t; K, C, D, h sont des coëfficients spécifiques; S est la surface de la section, dont la révolution engendre l'anneau; l est le contour de cette section.

Art. 106, 107, 108, 109, 110.

103. Les températures des points placés à égales distances sont représentées par les termes d'une série récurrente. L'observation des températures v_1 , v_2 , v_3 , de trois points consécutifs, donne la mesure du rapport $\frac{h}{K}$: on a $\frac{v_1+v_3}{v_2}=q$, $\omega^2-q\omega+1=0$, et $\frac{h}{K}=\frac{S}{l}\left(\frac{\log \omega}{\lambda \log e}\right)^2$. La distance de deux points consécutifs est λ , et log. ω est le logarithme décimal d'une des deux valeurs de ω .

77



GIO TABLE

SECTION II.

Equation du mouvement varié de la chaleur dans une sphère solide.

Pages.

106. x désignant le rayon d'une couche quelconque , le mouvement de la chaleur dans la sphère est exprimé par l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{dv}{dx}\right).$$

108. Conditions relatives à l'état de la surface et à l'état initial du solide.

SECTION III.

Équation du mouvement varié de la chaleur dans un cylindre solide.

l'une se rapporte aux températures intérieures, la seconde exprime l'état continuel de la surface, la troisième exprime l'état initial du solide.

SECTION IV.

Equation du mouvement uniforme de la chaleur dans un prisme solide d'une longueur infinie.

114. Le système des températures fixes satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} + \frac{d^2 v}{d z^2} = 0;$$

v est la température d'un point dont les cordonnées sont x, y, z.

117. Equation relative à l'état de la surface et à celui de la première tranche.



DES MATIÈRES.

611

SECTION V.

Equation du mouvement varié de la chaleur dans un cube solide.

ART. 126, 127, 128, 129, 130, 131.

Pages.

119. Le système des températures variables est déterminé par trois équations; l'une exprime l'état intérieur, la seconde se rapporte à l'état de la surface, et la troisième exprime l'état initial.

SECTION VI.

Equation générale de la propagation de la chaleur dans l'intérieur des solide.

124. Démonstration élémentaire des propriétés du mouvement uniforme de la chaleur dans un solide compris entre six plans rectangulaires, les températures constantes étant exprimées par l'équation linéaire

$$v = A - ax - by - cz$$
.

Les températures ne peuvent changer, parce que chaque point du solide reçoit autant de chaleur qu'il en donne. La quantité de chaleur qui traverse, durant l'unité de temps, un plan perpendiculaire à l'axe des z est la même en quelque point de cer axe que passe le plan. — La valeur de ce flux commun est celle qui aurait lieu, si les coëfficients a et b étaient nuls.

131. Expression analytique du flux dans l'intérieur d'un solide quel-conque. L'équation des températures étant v=f(x, y, z, t) la fonction — Kω. dv/dz exprime la quantité de chaleur qui traverse, pendant l'instant dt, une aire infiniment petite ω, perpendiculaire à l'axe des z, au point dont les coordonnées sont x, y, z, et dont la température est o après le temps écoulé t.

77.



> TABLE 612

> > ART. 142, 143, 144, 145.

Pages.

Il est facile de déduire du théorême précédent, l'équation générale du mouvement de la chaleur, qui est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right). \quad (AE)$$

SECTION VII.

Équation générale relative à la surface.

138. On démontre que les températures variables des points de la surface d'un corps qui se refroidit dans l'air, satisfont à cette équa-

$$m \cdot \frac{dv}{dx} + n \cdot \frac{dv}{dy} + p \cdot \frac{dv}{dz} + \frac{h}{K} \cdot vq = 0$$
, $mdx + ndy + pdz = 0$

étant l'équation différentielle de la surface qui termine le solide, et

q étant égale à $(m^2 + n^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour découvrir cette équation, on considère une molécule de l'enveloppe qui termine le solide, et l'on exprime que la température de cet élément ne change point d'une grandeur finie pendant un instant infiniment petit. Cette condition a lieu et continue de subsister après que l'action régulière du milieu s'est exercée pendant un instant très-petit. — On peut donner à l'élément de l'enveloppe une forme quelconque. Le cas où cette molécule est formée par des sections rectangulaires offre des propriétés remarquables. Dans le cas le plus simple, qui est celui où la base est parallèle au plan tangent, la vérité de l'équation est évidente.



DES MATIÈRES.

613

SECTION VIII.

Application des équations générales.

ART. 155, 156.

Pages.

149. En appliquant l'équation générale (E) au cas du cylindre et de la sphère, on trouve les mêmes équations que celles de la section III et de la section II de ce chapitre.

SECTION IX.

Remarques générales.

ART. 157, 158, 159, 160, 161, 162.

152. Considérations fondamentales sur la nature des quantités e, t, v, k, h, C, D, qui entrent dans toutes les expressions analytiques de la Théorie de la chaleur. Chacune de ces quantités a un exposant de dimension qui se rapporte à la longueur, ou à la durée, ou à la température; on trouve ces exposans en faisant varier les unités de mesure.

CHAPITRE III.

Propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire infini.

SECTION PREMIÈRE.

Exposition de la question.

ARTICLES 163, 164, 165, 166.

Pages

entre deux arêtes parallèles, infinies, retenues à la température o,

sont exprimées par l'équation $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$.



614 TABLE

Pages. ART. 167, 168, 169, 170.

163. On considère l'état de cette lame à une distance extrêmement grande de l'arête transversale, le rapport des températures de deux points, dont x_1 , y, et x_2 , y sont les coordonnées, change à mesure que la valeur de y augmente; x_1 et x_2 , conservant leurs valeurs respectives. Ce rapport a une limite dont il approche de plus en plus, et lorsque y est infinie, il est exprimé par le produit d'une fonction de x et d'une fonction de y. Cette remarque suffit pour découvrir la forme générale de v, savoir:

$$v = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i e^{-(2i-1)x} \cdot \cos(2i-1)y.$$

Il est facile de connaître comment le mouvement de la chaleur s'accomplit dans cette lame.

SECTION II.

Premier exemple de l'usage des séries trigonométriques dans la théorie de la chaleur.

167. Recherche des coëfficients dans l'équation

$$a = a \cos x + b \cos 3x + c \cos 5x + d \cos 7x + \cot 6$$

On en conclut

$$a_i = \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{4}{\pi} (-1)^{i+1}$$

ou
$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + , \text{ etc.}$$



DES MATIÈRES.

615

SECTION III.

Remarques sur ces séries.

Pages.

177. Pour trouver la valeur de la série qui forme le second membre, on suppose que le nombre m des termes est limité, et la série devient une fonction de x et m. On développe cette fonction selon les puissances réciproques de m, et l'on fait m infini.

180. On applique le même procédé à plusieurs autres séries.

184. Dans le développement précédent, qui donne la valeur de la fonction de x et de m, on détermine rigoureusement les limites dans lesquelles est comprise la somme de tous les termes, à partir d'un terme donné.

189. Procédé très-simple pour former la série

$$\frac{\pi}{4} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i-1} \cdot \cos\left(\frac{2i-1}{2i-1} \cdot x\right).$$

SECTION IV.

Solution générale.

190. Expression analytique du mouvement de la chaleur dans la table rectangulaire; il se décompose en mouvements simples.

193. Mesure de la quantité de chaleur qui traverse une arête parallèle



616 TABLE

ou perpendiculaire à la base. Cette expression du flux suffirait pour vérifier la solution.

Page:

197. Conséquences de cette solution. La table rectangulaire doit être considérée comme faisant partie d'un plan infini; la solution exprime les températures permanentes de tous les points de ce plan.

200. On démontre que la question proposée n'admet aucune autre solution différente de celle que l'on vient de rapporter.

SECTION V.

Expression finie du résultat de la solution.

207. La température d'un point de la table rectangulaire, dont x et y sont les coordonnées, est ainsi exprimée

$$\frac{\pi}{2}v = \text{arc. tang.} \left(\frac{2 \cos y}{e^{x} - e^{-x}} \right).$$

SECTION VI.

Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques.

210. On obtient ce développement en déterminant les valeurs des coëfficients inconnus dans les équations suivantes dont le nombre est infini,

A=
$$a+2$$
 $b+3$ $c+4$ $d+$ etc.
B= $a+2$ $^3b+3$ $^3c+4$ $^3d+$ etc.
C= $a+2$ $^5b+3$ $^5c+4$ $^5d+$ etc.
D= $a+2$ $^7b+3$ $^7c+4$ $^7d+$ etc.
etc.



DES MATIÈRES.

617

Pages.

Pour résoudre ces équations, on suppose d'abord que le nombre des équations est m, et qu'il y a seulement un nombre m d'inconnues a, b, c, d, etc. en omettant tous les termes subséquents. On détermine les inconnues pour une certaine valeur du nombre m, ensuite on augmente successivement cette valeur de m, et l'on cherche la limite dont s'approchent continuellement les valeurs des coëfficients; ces limites sont les quantités qu'il s'agit de déterminer. — Expression des valeurs de a, b, c, d, e, etc. lorsque m est infini.

226. On développe sous la forme

$$a\sin x + b\sin 2x + c\sin 3x + d\sin 4x + etc.$$

la fraction φx , que l'on suppose d'abord ne contenir que des puissances impaires de x.

228. Expression différente de ce même développement. Application à la fonction $e^x - e^{-x}$.

231. La fonction quelconque φx peut être développée sous cette forme : $a \sin_{\cdot} x + a_{2} \sin_{\cdot} 2x + a_{3} \sin_{\cdot} 3x + a_{4} \sin_{\cdot} ix + \text{etc.}$

La valeur du coëfficient général a_i est $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \, \varphi \, x \sin ix$. On en conclut ce théorème très-simple:

$$\frac{\pi}{2} = \sin x \int_{0}^{\pi} d\alpha \varphi \alpha \cdot \sin \alpha + \sin 2x \cdot \int_{0}^{\pi} d\alpha \varphi \alpha \sin 2\alpha + \sin 3x \cdot \int_{0}^{\pi} d\alpha \varphi \alpha \sin \alpha + \cot \alpha$$

ou
$$\frac{\pi}{2} \varphi x = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin ix \int_{0}^{\pi} d\alpha \varphi \alpha \sin \alpha.$$

78



618 TABLE

Pages

ART. 222, 223.

237. Application de ce théorême; on en déduit cette série remarquable:

$$\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{2}{1.3}\sin x + \frac{4}{3.5}\sin 4x + \frac{6}{5.7}\sin 7x + \frac{8}{7.9}\sin 9x + \text{ etc.}$$

ART. 224, 225, 226.

a39. Second théorême sur le développement des fonctions en séries trigonométriques:

$$\frac{\pi}{2}\psi x = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} \cos ix \int_{0}^{\pi} d\alpha \cos i\alpha \psi$$

Applications; on en conclut cette série remarquable:

$$\frac{1}{2}\pi \sin x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} - \frac{\cos 6x}{5.7} - \frac{\cos (8x)}{7.9} - \text{etc.}$$

243. Les théorêmes précédents s'appliquent aux fonctions discontinues, et résolvent les questions qui se sont élevées sur l'analyse de Daniel Bernouilli dans le problême des cordes vibrantes. — La valeur de la série

$$\sin x \cdot \sin x \cdot \sin x + \frac{1}{2} \sin x \cdot \sin$$

est $\frac{1}{2}\pi$, si l'on choisit pour x une quantité plus grande que o et moindre que α ; et la valeur de la série est o, si x est une quantité quelconque comprise entre α et $\frac{1}{2}\pi$. Application à d'autres exemples remarquables; lignes courbes ou surfaces qui se confondent dans une partie de leur cours, et diffèrent dans toutes les autres parties.



619

250. Une fonction quelconque F x peut être développée sous cette forme:

$$\mathbf{F}x = \mathbf{A} + \begin{cases} a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + \text{ etc.} \\ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \text{ etc.} \end{cases}$$

Chacun des coëfficients est une intégrale définie. On a en général

$$2\pi \mathbf{A} = \int_{-\pi}^{+\pi} dx \, \mathbf{F} x \,, \qquad \pi a_i = \int_{-\pi}^{+\pi} dx \, \mathbf{F} x \cos ix$$

$$\mathbf{et} \qquad \pi b_i = \int_{-\pi}^{+\pi} dx \, \mathbf{F} x \,. \sin ix.$$

On forme ainsi ce théorême général, qui est un des éléments principaux de notre analyse:

$$2\pi Fx = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left(\cos .ix \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F\alpha \cos .i\alpha + \sin .ix \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F\alpha . \sin .i\alpha\right),$$

ou
$$2\pi Fx = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha F\alpha \cos(ix-i\alpha).$$

256. On doit regarder comme entièrement arbitraires les valeurs de Fx,
 qui répondent aux valeurs de x comprises entre — π et +π.
 On peut aussi choisir pour x des limites quelconques.

258. Remarques diverses sur l'usage des développements en séries trigonométriques.

78.

620

TABLE

SECTION VII.

Application à la question actuelle.

ART. 236, 237.

Page.

261. Expression des températures permanentes dans la table rectangulaire infinie, l'état de l'arête transversale étant représenté par une fonction arbitraire.

CHAPITRE IV.

Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille.

SECTION PREMIÈRE.

Solution générale de la question.

ARTICLE 1.

Pages.

266. Le mouvement variable que l'on considère est composé de mouvements simples. Dans chacun de ces mouvements, les températures conservent leurs rapports primitifs, et décroissent, avec le temps, comme les ordonnées v de la ligne dont l'équation est v = Ae. Formation de l'expression générale.

272. Application à des exemples remarquables. Conséquences diverses de la solution.

277. Le système des températures converge rapidement vers un état régulier et final, exprimé par la première partie de l'intégrale.

Alors la somme des températures des deux points diamétralement



DES MATIÈRES.

621

Pages.

opposés est la même, quelle que soit la position du diamètre. Elle équivaut à la température moyenne. — Dans chaque mouvement simple, la circonférence est divisée par des nœuds équidistants. Tous ces mouvements partiels disparaissent progressivement, excepté le premier; et en général la chaleur distribuée dans le solide y affecte une disposition régulière, indépendante de l'état initial.

SECTION II.

De la communication de la chaleur entre des masses disjointes.

282. De la communication de la chaleur entre deux masses. Expression des températures variables. Remarque sur la valeur du coëfficient qui mesure la conducibilité.

287. De la communication de la chaleur entre n masses disjointes, rangées en ligne droite. Expression de la température variable de chaque masse; elle est donnée par une fonction du temps écoulé, du coefficient qui mesure la conducibilité, et de toutes les températures initiales regardées comme arbitraires.

296. Conséquences remarquables de cette solution.

298. Application au cas où le nombre des masses est infini.

300. De la communication de la chaleur entre n masses disjointes rangées circulairement. Équations différentielles propres à la question, intégration de ces équations. La température variable de chacune des masses est exprimée en fonction du coëfficient qui mesure la conducibilité, du temps qui s'est écoulé depuis l'instant où la



622

TABLE

Pages.

communication a commencé, et de toutes les températures initiales qui sont arbitraires: mais pour connaître entièrement ces fonctions, il est nécessaire d'effectuer l'élimination des coëfficients.

312. Élimination des coëfficients dans les équations qui contiennent ces inconnues, et les températures initiales données.

321. Formation de la solution générale; expression analytique du résultat.

323. Application et conséquences de cette solution.

328. Examen du cas où l'on suppose le nombre n infini. On obtient la solution relative à l'anneau solide, rapportée dans l'article 241, et le théorême de l'article 234. On connaît ainsi l'origine de l'analyse que nous avons employée pour résoudre les équations relatives aux corps continus.

332. Expression analytique des deux résultats précédents.

334. On démontre que la question du mouvement de la chaleur dans l'armille, n'admet aucune autre solution. Cette intégrale de l'équation $\frac{dv}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$ est évidemment la plus générale que l'on puisse former.



DES MATIÈRES.

623

CHAPITRE V.

De la propagation de la chaleur dans une sphère solide.

SECTION PREMIÈRE.

Solution générale.

Pages

340. On considère en premier lieu que le rapport des températures variables des deux points du solide s'approche continuellement d'une limite déterminée. Cette remarque conduit à l'équation $v = A \cdot \frac{\sin \cdot (n \cdot x)}{x} e^{-Kn^2t}$, qui exprime le mouvement simple de la chaleur dans la sphère. Le nombre n a une infinité de valeurs données par l'équation déterminée $\frac{n \cdot X}{\tan g \cdot n \cdot X} = i - h \cdot X$. On désigne par X le rayon de la sphère, et par x le rayon d'une sphère concentrique quelconque, dont v est la température, après le temps écoulé t; h et K sont les coëfficients spécifiques; A est une constante quelconque. Constructions propres à faire connaître la nature de l'équation déterminée, les limites et les valeurs de ses racines.

347. Formation de la solution générale; état final du solide.

350. Application au cas où la sphère a été échauffée par une longue immersion.



624

TABLE

SECTION II.

Remarques diverses sur cette solution.

ART. 294, 295, 296.

ages

352. Conséquences relatives aux sphères d'un petit rayon, et aux températures finales d'une sphère quelconque.

ART. 298, 299, 300.

357. Température variable d'un thermomètre plongé dans un liquide qui se refroidit librement. Application de ces résultats à la comparaison et à l'usage des thermomètres.

ART. 301.

362. Expression de la température moyenne de la sphère en fonction du temps écoulé.

ART. 302, 303, 304.

363. Application aux sphères d'un très-grand rayon, et à celles dont le rayon est très-petit.

ART. 305.

366. Remarque sur la nature de l'équation déterminée qui donne toutes les valeurs de n.

CHAPITRE VI.

Du mouvement de la chaleur dans un cylindre solide.

ART. 306, 307.

369. On remarque en premier lieu que le rapport des températures variables de deux points du solide s'approche continuellement d'une limite déterminée, et l'on connaît par-là l'expression du mouvement simple. La fonction de x, qui est un des facteurs de cette



DES MATIÈRES.

625

expression, est donnée par une équation différentielle du second ordre. Il entre dans cette fonction un nombre g, qui doit satisfaire à une équation déterminée.

372. Analyse de cette équation. On démontre, au moyen des principaux théorêmes de l'algèbre, que toutes les racines de l'équation sont réelles.

ART. 310.

375. La fonction u de la variable x est exprimée

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dr \cos (x \sqrt{g} \cdot \sin r);$$

et l'équation déterminée est $hu + \frac{du}{dx} = 0$, en donnant à x sa valeur totale X.

ART. 311, 312.

378. Le développement de la fonction $\varphi(z)$ étant représenté par

$$a + bz + c\frac{z^2}{2} + d \cdot \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \text{ etc.},$$

la valeur de la série

$$a + \frac{bt^3}{2^2} + \frac{ct^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{dt^6}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{etc.}$$

est

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}du\,\varphi\,(t\sin u).$$

Remarque sur cet usage des intégrales définies.

ART. 313.

381. Expression de la fonction u de la variable x en fraction continue.

79



626

TABLE

Pages.

ART. 314.

382. Formation de la solution générale.

ART. 315, 316, 317, 318.

384. Exposition de l'analyse qui détermine les valeurs des coëfficients.

ART. 319.

391. Solution générale.

ART. 320.

393. Conséquences de cette solution.

CHAPITRE VII.

Propagation de la chaleur dans un prisme rectangulaire.

ART. 321, 322, 323.

Pages.

395. Expression du mouvement simple déterminé par les propriétés générales de la chaleur, et par la figure du solide. Il entre dans cette expression un arc a qui satisfait à une équation transcendante, dont toutes les racines sont réelles.

ART. 324.

398. On détermine tous les coëfficients inconnus par des intégrales définies.

ART. 325.

399. Solution générale de la question.

ART. 326, 327.

401. La question proposée n'admet aucune autre solution.

Art. 328, 329.

403. Températures des points de l'axe du prisme.

Акт. 330.

405. Application au cas où l'épaisseur du prisme est très-petite.



DES MATIÈRES.

627

Pages

ART. 331, 332.

406. La solution fait connaître comment s'établit le mouvement uniforme de la chaleur dans l'intérieur du solide.

ART. 332.

409. Application à des prismes dont la base a de grandes dimensions.

CHAPITRE VIII.

Du mouvement de la chaleur dans un cube solide.

ART. 333, 334.

Pages.

411. Expression du mouvement simple. Il y entre un arc ε qui doit satisfaire à une équation trigonométrique dont toutes les racines sont réelles.

ART. 335, 336.

413. Formation de la solution générale.

ART. 337.

417. La question ne peut admettre aucune autre solution.

ART. 338.

Ibid. Conséquence de cette solution.

ART. 33q.

418. Expression de la température moyenne.

ART. 340.

420. Comparaison du mouvement final de la chaleur dans le cube, avec le mouvement qui a lieu dans la sphère.

ART. 341.

422. Application au cas simple que l'on a considéré dans l'art. 100.

79.



628

TABLE

CHAPITRE IX.

De la diffusion de la chaleur.

SECTION PREMIÈRE.

Du mouvement libre de la chaleur dans une ligne infinie.

Pages

428. On considère le mouvement linéaire de la chaleur dans une ligne infinie, dont une partie a été échauffée; l'état initial est représenté par v = Fx. On démontre le théorême suivant:

$$\frac{\pi}{2}. Fx = \int_{0}^{\infty} dq \cos q x \int_{0}^{\infty} d\alpha F \alpha \cos q \alpha.$$

La fonction Fx satisfait à la condition Fx = F(-x). Expression des températures variables.

433. Application au cas où tous les points de la partie échauffée ont reçu la même température initiale. L'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dq}{q} \cdot \sin q \cdot \cos q x \quad \text{est} \quad \frac{1}{2} \pi,$$

Si l'on donne à x une valeur comprise entre 1 et -1; et cette intégrale définie a une valeur nulle, si x n'est pas comprise entre 1 et -1.

Ibid. Application au cas où l'échauffement donné résulte de l'état final que détermine l'action d'un foyer.



DES MATIÈRES.

629

Pages.

Акт. 350.

434. Valeurs discontinues de la fonction exprimée par l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dq}{1+q^2} \cdot \cos qx$$

ART. 351, 352, 353.

435. On considère le mouvement linéaire de la chaleur dans une ligne infinie dont les températures initiales sont représentées par v = fx à la distance x vers la droite de l'origine, et par v = -fx à la distance x vers la ganche de l'origine. Expression de la température variable d'un point quelconque. On déduit cette solution de l'analyse qui exprime le mouvement de la chaleur dans une ligne infinie.

439. Expression des températures variables lorsque l'état initial de la partie échauffée est exprimée par une fonction entièrement arbitraire.

441. Les développements des fonctions en sinus ou cosinus d'arcs multiples se transforment en intégrales définies.

444. On démontre le théorême suivant :

$$\frac{\pi}{2} f x = \int_{0}^{\infty} dq \cdot \sin qx \int_{0}^{\infty} d\alpha f_{\alpha} \sin q\alpha.$$

La fonction fx satisfait à cette condition: f(-x) = -fx.

446. Usage des résultats précédents. On démontre le théorême exprimé par cette équation générale:



63o

TABLE

Pages

$$\pi \varphi x = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \varphi \alpha \int_{0}^{\infty} dq \cos (qx - q\alpha).$$

Cette équation est évidemment comprise dans l'équation (π) , rapportée article 234. (Voir art. 397).

450. La solution précédente fait aussi connaître le mouvement variable de la chaleur dans une ligne infinie, dont un point est assujetti à une température constante.

453. On peut aussi résoudre cette même question au moyen d'une autre forme de l'intégrale. Formation de cette intégrale.

455. Application de cette solution à un prisme infini, dont les températures initiales sont nulles. Conséquences remarquables.

461. La même intégrale s'applique à la question de la diffusion de la chaleur. La solution que l'on en déduit est conforme à celle que l'on a rapportée dans les articles 347, 348.

466. Remarques sur diverses formes de l'intégrale de l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}.$$

SECTION II.

Du mouvement libre de la chaleur dans un solide infini.

470. L'expression du mouvement variable de la chaleur dans une masse



63₁

Pages.

solide infinie, et selon les trois dimensions, se déduit immédiatement de celle du mouvement linéaire. L'intégrale de l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}$$

résout la question proposée. Il ne peut y avoir aucune intégrale plus étendue; elle se déduit aussi de la valeur particulière

$$v = e^{-n^{u}t} \cdot \cos nx$$

ou de celle-ci:

$$v = \frac{c^{\frac{-x^*}{4t}}}{\sqrt{t}},$$

qui satisfont l'une et l'autre à l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}$. La généralité des intégrales que l'on obtient est fondée sur la proposition suivante, que l'on peut regarder comme évidente d'elle-même. Deux fonctions des variables x, y, z, t sont nécessairement

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

identiques, si elles satisfont à l'équation différentielle

et si en même temps elles ont la même valeur pour une certaine valeur de t.

480. La chaleur contenue dans une partie d'un prisme infini, dont tous les autres points ont une température initiale nulle, commence à se distribuer dans toute la masse; et après un certain intervalle de temps, l'état d'une partie du solide ne dépend point de la distribution de la chaleur initiale, mais seulement de sa quantité. Ce dernier résultat n'est point dû à l'augmentation de la distance comprise entre un point de la masse et la partie qui avait été échauffée; il est entièrement dû à l'augmentation du temps écoulé.



632

TABLE

Pages.

— Dans toutes les questions soumises au calcul, les exposants sont des nombres absolus, et non des quantités. On ne doit point omettre les parties de ces exposants qui sont incomparablement plus petites que les autres, mais seulement celles qui ont des valeurs absolues extrêmement petites.

490. Les mêmes remarques s'appliquent à la distribution de la chaleur dans un solide infini.

SECTION III.

Des plus hautes températures dans un solide infini.

494. La chaleur contenue dans une partie du prisme se distribue dans toute la masse. La température d'un point éloigné s'élève progressivement, arrive à sa plus grande valeur, et décroît ensuite. Le temps après lequel ce maximum a lieu, est une fonction de la distance x. Expression de cette fonction pour un prisme dont les points échauffés ont reçu la même température initiale.

497. Solution d'une question analogue à la précédente. Conséquences diverses de cette solution.

503. On considère le mouvement de la chaleur dans un solide infini, et l'on détermine les plus hautes températures des points très-éloignés de la partie primitivement échauffée.



DES MATIÈRES.

633

SECTION IV.

Comparaison des intégrales.

Art. 396.

Pages.

509. Première intégrale (a) de l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}$ (a). Cette intégrale exprime le mouvement de la chaleur dans l'armille.

ART. 397.

511. Seconde intégrale (β) de cette même équation (a). Elle exprime le mouvement linéaire de la chaleur dans un solide infini.

ART. 398.

513. On en déduit deux autres formes (γ) et (δ) de l'intégrale, qui dérivent, comme la précédente, de l'intégrale (α).

514. Premier développement de la valeur de v selon les puissances croissantes du temps t. Deuxième développement, selon les puissanses de v. Le premier doit contenir une seule fonction arbitraire de t.

517. Notation propre à représenter ces développements. Le calcul qui en dérive dispense d'effectuer le développement en série.

ART. 402.

519. Application aux équations

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{dv^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \quad (c), \quad \text{et} \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^4v}{dz^4} = 0 \quad (d).$$

ART. 403.

523. Application aux équations

80

634

TABLE

$$\frac{d^{2}v}{dt^{2}} + \frac{d^{2}v}{dx^{2}} + 2 \cdot \frac{d^{4}v}{dz^{2} \cdot dy^{2}} + \frac{d^{4}v}{dy^{4}} = 0, \quad (e)$$
et
$$\frac{dv}{dt} = a \cdot \frac{d^{2}v}{dz^{2}} + b \cdot \frac{d^{4}v}{dx^{4}} + c \cdot \frac{d^{6}v}{dz^{6}} + d \cdot \frac{d^{8}v}{dz^{8}} + \text{ etc.} \quad (f)$$

ART. 404.

523. Usage du théorême E de l'article 361, pour former l'intégrale de l'équation (f) de l'article précédent.

225. Usage du même théorême pour former l'intégrale de l'équation (d), qui convient aux lames élastiques.

Art. 406.

529. Seconde forme de cette même intégrale.

530. Lemmes qui servent à effectuer ces transformations.

533. Notre théorême exprimé par l'équation (E), page 449, convient à un nombre quelconque de variables.

535. Usage de cette proposition pour former l'intégrale de l'équation (c) de l'article 402.

537. Application du même théorême à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

ART. 411.

538. Intégrale de l'équation (e) des surfaces élastiques vibrantes.

540. Seconde forme de cette intégrale.



DES MATIÈRES.

635

Pages.

ART. 413.

541. Usage du même théorême pour obtenir les intégrales, en sommant les séries qui les représente. Application à l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dz^2}$$

Intégrale sous forme finie, contenant deux fonctions arbitraires de t.

545. Les expressions changent de forme lorsqu'on choisit d'autres limites des intégrales définies.

546. Construction qui sert à démontrer l'équation générale

$$fx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dp \cos(px - p\alpha).$$
 (B)

551. On peut prendre des limites quelconques a et b pour l'intégrale par rapport à a. Ces limites sont celles des valeurs de a, qui correspondent à des valeurs subsistantes de la fonction fx. Toute autre valeur de x donne pour fx un résultat nul.

554. La même remarque convient à l'équation générale

$$fx = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{z=+\infty} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f \alpha \cos \left(i \cdot \frac{2\pi}{X} \cdot x - \alpha\right),$$

dont le second membre représente une fonction périodique.

557. Le caractère principal du théorême exprimé par l'équation (B), consiste en ce que le signe f de fonction est transporté à une 80.



636

TABLE

Peges

autre indéterminée α , et que la variable principale v n'est plus que sous le signe cosinus.

558. Usage de ces théorêmes dans le calcul des quantités imaginaires.

559. Application à l'équation

$$\frac{d^{\frac{n}{2}}v}{dz^{\frac{n}{2}}} + \frac{d^{\frac{n}{2}}v}{dy^{\frac{n}{2}}} = 0.$$

561. Expression générale de la fluxion de l'ordre i:

$$\frac{d^{i}(fx)}{dx^{i}}.$$

562. Construction qui sert à démontrer l'équation générale. — Conséquences relatives à l'étendue des équations de ce genre, aux valeurs de fx, qui répondent aux limites de x, aux valeurs infinies de fx.

566. La méthode qui consiste à déterminer par des intégrales définies les coëfficients inconnus du développement d'une fonction de x, sous la forme

$$a \varphi (\mu_1.x) + b \varphi (\mu_2.x) + c \varphi (\mu_3.x) + \text{etc.}$$

se déduit des éléments de l'analyse algébrique. Exemple relatif à la distribution de la chaleur dans la sphère solide. En examinant sous ce point de vue le procédé qui sert à déterminer les coëfficients, on résout facilement les questions qui peuvent s'élever sur l'emploi de tous les termes du second membre, sur la discontinuité des fonctions, sur les valeurs singulières ou infi-



DES MATIÈRES.

 63_{7}

Pages.

nies. — Les équations que l'on obtient par cette méthode expriment, ou l'état variable, ou l'état initial des masses de dimensions infinies. — La forme des intégrales qui conviennent à la théorie de la chaleur, représente à-la-fois la composition des mouvements simples, et celle d'une infinité d'effets partiels, dus à l'action de tous les points du solide.

ART. 428.

580. Remarques générales sur la méthode qui a servi à résoudre les questions analytiques de la théorie de la chaleur.

ART. 429.

589. Remarques générales sur les principes dont on a déduit les équations différentielles du mouvement de la chaleur.

Акт. 430.

595. Dénominations relatives aux propriétés générales de la chaleur.

ART. 431.

596. Notations proposées.

ART. 432, 433.

597. Remarques générales sur la nature des coëfficients qui entrent dans les équations différentielles du mouvement de la chaleur.

FIN DE LA TABLE.