THÉORIE
DE
LA CHALEUR.

Et ignem regunt numeri. PLATO.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

SECTION PREMIÈRE.

Exposition de l'objet de cet ouvrage.

ART. I[er]

LES effets de la chaleur sont assujétis à des lois constantes que l'on ne peut découvrir sans le secours de l'analyse mathématique. La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois; elle réduit toutes les recherches physiques, sur la propagation de la chaleur, à des questions de calcul intégral dont les élémens sont donnés par l'expérience. Aucun sujet n'a des rapports plus étendus avec les progrès de l'industrie et ceux des sciences naturelles; car l'action de la chaleur est toujours présente, elle pénètre tous les corps et les espaces, elle influe sur les procédés des arts, et concourt à tous les phénomènes de l'univers.

Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'une masse solide, elle tend à se mettre en équilibre, et passe lentement des parties plus échauffées dans celles qui le sont moins; en même temps elle se dissipe par la surface, et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme, et cette émission spontanée qui s'opère à la surface des corps, changent continuellement la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un instant donné, en supposant que les températures initiales sont connues. Les exemples suivants feront connaître plus clairement la nature de ces questions.

2.

Si l'on expose à l'action durable et uniforme d'un foyer de chaleur une même partie d'un anneau métallique, d'un grand diamètre, les molécules les plus voisines du foyer s'échaufferont les premières, et, après un certain temps, chaque point du solide aura acquis presque entièrement la plus haute température à laquelle il puisse parvenir. Cette limite ou maximum de température n'est pas la même pour les différents points; elle est d'autant moindre qu'ils sont plus éloignés de celui où le foyer est immédiatement appliqué.

Lorsque les températures sont devenues permanentes, le foyer transmet, à chaque instant, une quantité de chaleur qui compense exactement celle qui se dissipe par tous les points de la surface extérieure de l'anneau.

Cambridge University Press
978-1-108-00180-9 - Theorie Analytique de la Chaleur
Jean Baptiste Joseph Fourier
Excerpt
More information

Si maintenant on supprime le foyer, la chaleur continuera de se propager dans l'intérieur du solide, mais celle qui se perd dans le milieu ou dans le vide ne sera plus compensée comme auparavant par le produit du foyer, en sorte que toutes les températures varieront et diminueront sans cesse, jusqu'à ce qu'elles soient devenues égales à celles du milieu environnant.

3.

Pendant que les températures sont permanentes et que le foyer subsiste, si l'on élève, en chaque point de la circonférence moyenne de l'anneau, une ordonnée perpendiculaire au plan de l'anneau, et dont la longueur soit proportionnelle à la température fixe de ce point, la ligne courbe qui passerait par les extrémités de ces ordonnées représentera l'état permanent des températures, et il est très-facile de déterminer par le calcul la nature de cette ligne. Il faut remarquer que l'on suppose à l'anneau une épaisseur assez petite pour que tous les points d'une même section perpendiculaire à la circonférence moyenne aient des températures sensiblement égales. Lorsqu'on aura enlevé le foyer, la ligne qui termine les ordonnées proportionnelles aux températures des différents points, changera continuellement de forme. La question consiste à exprimer, par une équation, la forme variable de cette courbe, et à comprendre ainsi dans une seule formule tous les états successifs du solide.

4.

Soit z la température fixe d'un point m de la circonférence moyenne, x la distance de ce point au foyer, c'est-à-dire la longueur de l'arc de la circonférence moyenne compris entre le point m et le point o, qui correspond à la position du foyer; z est la plus haute température que le point m puisse acquérir en vertu de l'action constante du foyer, et cette température permanente z est une fonction $f(x)$ de la distance x. La première partie de la question consiste à déterminer la fonction $f(x)$ qui représente l'état permanent du solide.

On considérera ensuite l'état variable qui succède au précédent, aussitôt que l'on a éloigné le foyer; on désignera par t le temps écoulé depuis cette suppression du foyer, et par v la valeur de la température du point m après le temps t. La quantité v sera une certaine fonction $F(x,t)$ de la distance x et du temps t; l'objet de la question est de découvrir cette fonction $F(x,t)$ dont on ne connaît encore que la valeur initiale qui est fx, en sorte que l'on doit avoir l'équation de condition $fx = F(x,o)$.

5.

Si l'on place une masse solide homogène, de forme sphérique ou cubique, dans un milieu entretenu à une température constante, et qu'elle y demeure très-long-temps plongée, elle acquerra dans tous ses points une température très-peu différente de celle du fluide. Supposons qu'on l'en retire pour la transporter dans un milieu plus froid, la chaleur commencera à se dissiper par la surface; les températures des différents points de la masse ne seront plus sensiblement les mêmes, et si on la suppose divisée en une infinité de couches par des surfaces parallèles à la surface extérieure, chacune de ces couches transmettra, dans un instant, une certaine quantité de chaleur à celle qui l'enveloppe. Si l'on conçoit que chaque molécule porte un thermomètre séparé, qui indique à chaque instant sa température, l'état du solide sera continuellement représenté par le système variable de toutes ces hauteurs thermométriques. Il s'agit d'exprimer les états successifs par des formules analytiques, en sorte que l'on puisse connaître, pour un instant donné, la température indiquée par chaque thermomètre, et comparer les quantités de chaleur qui s'écoulent, dans le même instant, entre deux couches contiguës, ou dans le milieu environnant.

6.

Si la masse est sphérique, et que l'on désigne par x la distance d'un point m de cette masse au centre de la sphère, par t le temps écoulé depuis le commencement du refroidissement, et par v la température variable du point m, il est facile de voir que tous les points placés à la même distance x du centre ont la même température v. Cette quantité v est une certaine fonction $F(x,t)$ du rayon x et du temps écoulé t; elle doit être telle, qu'elle devienne constante, quelle que soit la valeur de x, lorsqu'on suppose celle de t nulle; car, d'après l'hypothèse, la température de tous les points est la même au moment de l'émersion. La question consiste à déterminer la fonction de x et de t qui exprime la valeur de v.

7.

On considérera ensuite que, pendant la durée du refroidissement, il s'écoule à chaque instant, par la surface extérieure, une certaine quantité de chaleur qui passe dans le milieu. La valeur de cette quantité n'est pas constante; elle est plus grande au commencement du refroidissement. Si l'on se représente aussi l'état variable de la surface sphérique intérieure dont le rayon est x, on reconnaît facilement qu'il doit y avoir, à chaque instant, une certaine quantité de chaleur qui traverse cette surface et passe dans la partie de la masse qui est plus éloignée du centre. Ce flux continuel de chaleur est variable comme celui de la surface extérieure, et l'un et l'autre sont des quantités comparables entre elles; leurs rapports sont des nombres dont les valeurs variables sont des fonctions de la distance x et du temps écoulé t. Il s'agit de déterminer ces fonctions.

8.

Si la masse échauffée par une longue immersion dans un milieu, et dont on veut calculer le refroidissement, est de forme cubique, et si l'on détermine la position de chaque point m par trois coordonnées rectangulaires x, y, z, en prenant pour origine le centre du cube, et pour axes les lignes perpendiculaires aux faces, on voit que la température v du point m, après le temps écoulé t, est une fonction des quatre variables x, y, z et t. Les quantités de chaleur qui s'écoulent à chaque instant, par toute la surface extérieure du solide, sont variables et comparables entre elles; leurs rapports sont des fonctions analytiques qui dépendent du temps t, et dont il faut assigner l'expression.

9.

Examinons aussi le cas où un prisme rectangulaire d'une assez grande épaisseur et d'une longueur infinie, étant assujéti, par son extrémité, à une température constante, pendant que l'air environnant conserve une température moindre, est enfin parvenu à un état fixe qu'il s'agit de connaître. Tous les points de la section extrême qui sert de base au prisme ont, par hypothèse, une température commune et permanente. Il n'en est pas de même d'une section éloignée du foyer; chacun des points de cette surface rectangulaire, parallèle à la base, a acquis une température fixe, mais qui n'est pas la même pour les différents points d'une même section, et qui doit être moindre pour les points les plus voisins de la surface exposée à l'air. On voit aussi qu'il s'écoule à chaque instant, à travers une section donnée, une certaine quantité de chaleur qui demeure toujours la même, puisque l'état du solide est devenu constant. La question consiste à déterminer la température permanente d'un point donné du solide, et la quantité totale de chaleur qui, pendant un temps déterminé, s'écoule à travers une section dont la position est donnée.

10.

Prenons pour origine des coordonnées x, y, z, le centre de la base du prisme, et pour axes rectangulaires, l'axe même du prisme et les deux perpendiculaires sur les faces latérales : la température permanente v du point m, dont les coordonnées sont x, y, z, est une fonction de trois variables $F(x, y, z)$; elle reçoit, par hypothèse, une valeur constante, lorsque l'on suppose x nulle, quelles que soient les valeurs de y et de z. Supposons que l'on prenne pour unité la quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, sortirait d'une superficie égale à l'unité de surface, si la masse échauffée, que cette superficie termine, et qui est formée de la même substance que le prisme, était continuellement entretenue à la température de l'eau bouillante, et plongée dans l'air atmosphérique entretenu à la température de la glace fondante. On voit que la quantité de chaleur qui, dans l'état permanent du prisme rectangulaire, s'écoule, pendant l'unité de temps, à travers une certaine section perpendiculaire à l'axe, a un rapport déterminé avec la quantité de chaleur prise pour unité. Ce rapport n'est pas le même pour toutes les sections; il est une fonction $\varphi(x)$ de la distance x, à laquelle une section est placée; il s'agit de trouver l'expression analytique de la fonction $\varphi(x)$.

11.

Les exemples précédents suffisent pour donner une idée exacte des diverses questions que nous avons traitées.

La solution de ces questions nous a fait connaître que les effets de la propagation de la chaleur dépendent, pour chaque substance solide, de trois qualités élémentaires, qui sont la capacité de chaleur, la conducibilité propre, et la conducibilité extérieure. On a observé que si deux corps de même volume et de nature différente ont des températures égales, et qu'on leur ajoute une même quantité de chaleur, les accroissements de température ne sont pas les mêmes; le rapport de ces accroissements est celui des capacités de chaleur. Ainsi le premier des trois éléments spécifiques qui règlent l'action de la chaleur est exactement défini, et les physiciens connaissent depuis long-temps plusieurs moyens d'en déterminer la valeur. Il n'en est pas de même des deux autres; on en a souvent observé les effets, mais il n'y a qu'une théorie exacte qui puisse les bien distinguer, les définir et les mesurer avec précision. La conducibilité propre ou intérieure d'un corps exprime la facilité avec laquelle la chaleur s'y propage en passant d'une molécule intérieure à une autre. La conducibilité extérieure ou relative d'un corps solide dépend de la facilité avec laquelle la chaleur en pénètre la surface, et passe de ce corps dans un milieu donné, ou passe du milieu dans le solide. Cette dernière propriété est modifiée par l'état plus ou moins poli de la surperficie; elle varie aussi selon le milieu dans lequel le corps est plongé; mais la conducibilité propre ne peut changer qu'avec la nature du solide.

Ces trois qualités élémentaires sont représentées dans nos formules par des nombres constants, et la théorie indique elle-même les expériences propres à en mesurer la valeur. Dès qu'ils sont déterminés, toutes les questions relatives à la propagation de la chaleur ne dépendent que de l'analyse numérique. La connaissance de ces propriétés spécifiques peut être immédiatement utile dans plusieurs applications des sciences physiques; elle est d'ailleurs un élément de l'étude et de la description des diverses substances. C'est connaître très-imparfaitement les corps, que d'ignorer les rapports qu'ils ont avec un des principaux agents de la nature. En général, il n'y a aucune théorie mathématique qui ait plus de rapport que celle-ci avec l'économie publique, puisqu'elle peut servir à éclairer et à perfectionner l'usage des arts nombreux qui sont fondés sur l'emploi de la chaleur.

12.

La question des températures terrestres offre une des plus belles applications de la théorie de la chaleur; voici l'idée générale que l'on peut s'en former. Les différentes parties de la surface du globe sont inégalement exposées à l'impression des rayons solaires; l'intensité de cette action dépend de la latitude du lieu; elle change aussi pendant la durée du jour et pendant celle de l'année, et est assujétie à d'autres inégalités moins sensibles. Il est évident qu'il existe, entre cet état variable de la surface et celui des températures intérieures, une relation nécessaire que l'on peut déduire de la théorie. On sait qu'à une certaine profondeur au-dessous de la surface de la terre, la température n'éprouve aucune variation annuelle dans un lieu donné : cette température permanente des lieux profonds est d'autant moindre, que le lieu est plus éloigné de l'équateur. On peut donc faire abstraction de l'enveloppe extérieure, dont l'épaisseur est incomparablement plus petite que le rayon terrestre, et regarder cette planète comme une masse presque sphérique, dont la surface est assujétie à une température qui demeure constante pour tous les points d'un parallèle donné, mais qui n'est pas la même pour un autre parallèle. Il en résulte que chaque molécule intérieure a aussi une température fixe déterminée par sa position. La question mathématique consisterait à connaître la température fixe d'un point donné, et la loi que suit la chaleur solaire en pénétrant dans l'intérieur du globe.

Cette diversité des températures nous intéresse davantage, si l'on considère les changements qui se succèdent dans l'enveloppe même dont nous habitons la superficie. Ces alternatives de chaleur et de froid, qui se reproduisent chaque jour et dans le cours de chaque année, ont été jusqu'ici l'objet d'observations multipliées. On peut aujourd'hui les soumettre au calcul, et déduire d'une Théorie commune tous les faits particuliers que l'expérience nous avait appris. Cette question se réduit à supposer que tous les points de la surface d'une sphère immense sont affectés de températures périodiques; l'analyse fait ensuite connaître suivant quelle loi l'intensité des variations décroît à mesure que la profondeur augmente; quelle est, pour une profondeur donnée, la quantité des changements annuels ou