CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

SECONDE PARTIE.

LA DYNAMIQUE.

SEPTIÈME SECTION.

Sur le mouvement d'un système de corps libres, regardés comme des points, et animés par des forces d'attraction.

On peut ranger en trois classes tous les systèmes de corps qui agissent les uns sur les autres, et dont on peut déterminer le mouvement par les lois de la Mécanique; car leur action mutuelle ne peut s'exercer que de trois manières différentes qui nous soient connues, ou par des forces d'attraction, lorsque les corps sont isolés, ou par des liens qui les unissent, ou enfin par la collision immédiate. Notre système planétaire appartient à la première classe, et par cette raison les problèmes qui s'y rapportent doivent tenir le premier rang parmi tous les problèmes de la Dynamique. Nous allons en faire l'objet de cette Section.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

Quoique dans les systèmes de cette classe, où les corps sont supposés se mouvoir librement, il soit très-facile de trouver les équations de leur mouvement, puisqu'il ne s'agit que de réduire toutes les forces à trois directions perpendiculaires entre elles, et d'égaler, par le principe des forces accélératrices, la force suivant chacune de ces directions, à l'élément de la vîtesse relative à la même direction, divisé par l'élément du temps; néanmoins l'usage des formules données dans la quatrième Section est toujours préférable, parce qu'elles fournissent directement, et sans aucune décomposition préalable de forces, les équations différentielles les plus simples, quelles que soient les coordonnées qu'on emploie pour déterminer la position des corps, même lorsque les corps, au lieu d'être tout-à-fait libres, sont contraints de se mouvoir sur des surfaces ou des lignes données.

Nous commencerons par rappeler les formules dont nous ferons usage.

1. Soient m, m′, m″, etc. les masses des différens corps regardés comme des points, x, y, z les coordonnées rectangles du corps m, x', y', z' celles du corps m′, et ainsi de suite; ces coordonnées étant toutes rapportées aux mêmes axes fixes dans l'espace. On fera

$$T = \mathrm{m}\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \mathrm{m}'\,\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} + \text{etc.}$$

Et si à la place des coordonnées rectangles x, y, z on veut employer d'autres coordonnées quelconques ξ, η, ζ, il n'y aura qu'à substituer les valeurs de x, y, z en ξ, η, ζ dans la formule $dx^2 + dy^2 + dz^2$; de même on substituera dans $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ les valeurs de x', y', z' en ξ', η', ζ', si on veut transformer les coordonnées rectangles x', y', z' en ξ', η', ζ', et ainsi de suite. De cette manière la quantité T deviendra une fonction des variables ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', etc., et de leurs différences premières.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

Soient maintenant R, Q, P, etc. les forces avec lesquelles chaque point de la masse m tend vers des centres fixes ou non, dont les distances soient r, q, p, etc., lesquelles étant données en x, y, z, deviendront aussi des fonctions de ξ, η, ζ; on fera

$$\delta\Pi = R\delta r + Q\delta q + P\delta p + \text{etc.},$$

soit que $\delta\Pi$ soit une différentielle complète ou non; et dénotant par les mêmes lettres marquées d'un trait, de deux traits, etc., les quantités analogues relatives aux corps m′, m″, etc.; on fera de plus

$$\delta V = \mathrm{m}\delta\Pi + \mathrm{m}'\delta\Pi' + \mathrm{m}''\delta\Pi'' + \text{etc.}$$

Si, outre ces forces dirigées vers des centres donnés, il y avait des forces d'attraction mutuelle entre toutes les molécules des corps m et m′, en nommant r la distance de ces corps regardés comme des points, et R la force d'attraction dépendante de la distance ou non, il faudrait ajouter à δV le terme $\mathrm{mm'R}\delta\mathrm{r}$, et ainsi pour tous les autres corps qui s'attireraient mutuellement.

Or les corps étant supposés libres, les coordonnées qui déterminent leur position dans l'espace sont indépendantes, et chacune d'elles, comme ξ, donnera une équation de la forme

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta\xi} + \frac{\delta V}{\delta\xi} = 0.$$

2. Lorsque les quantités $\delta\Pi$, $\delta\Pi'$, etc. sont des différentielles complètes, ce qui a toujours lieu dans le cas où les forces sont proportionnelles à des fonctions quelconques de leurs distances aux centres d'attraction, lequel est celui de la nature, il sera plus simple de prendre d'abord les intégrales Π, Π', etc., lesquelles seront

$$\Pi = \int Rdr + \int Qdq + \int Pdp + \text{etc.},$$
$$\Pi' = \int R'dr' + \int Q'dq' + \int P'dp' + \text{etc.},$$
etc.

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge
Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

et la quantité V deviendra

$$V = \mathrm{m}\Pi + \mathrm{m}'\Pi' + \mathrm{m}''\Pi'' + \text{etc.},$$

laquelle étant réduite en fonction des variables ξ, η, ζ, ξ', η', etc., il sera aisé d'en déduire par la différentiation les différences partielles $\frac{\delta V}{\delta \xi}$, $\frac{\delta V}{\delta \eta}$, etc. Dans ce cas, si les fonctions T et V ne renferment point le temps fini t, on aura toujours l'intégrale

$$T + V = H,$$

H étant une constante arbitraire, laquelle renferme le principe des forces vives.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement d'un corps regardé comme un point et attiré, vers un centre fixe, par des forces proportionnelles à une fonction de la distance; et en particulier du mouvement des planètes et des comètes autour du soleil.

3. Lorsqu'on ne considère que le mouvement d'un corps isolé, on peut supposer sa masse m égale à l'unité, et l'on aura simplement

$$T = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2}, \qquad V = \Pi,$$

et

$$\delta V = R\delta r + Q\delta q + P\delta p + \text{etc.}$$

Dans ce cas, quelles que soient les trois coordonnées qui déterminent le lieu du corps dans l'espace, comme elles sont indépendantes, elles donneront trois équations différentielles de la forme

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} = 0,$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge
Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

auxquelles on pourra joindre l'équation du premier ordre

$$T + V = H,$$

qui tiendra lieu de l'une d'entre elles.

Si le mouvement se faisait dans un milieu résistant, en désignant la résistance par R, il n'y aurait qu'à ajouter à la valeur de δV les termes (art. 8, Sect. II).

$$\mathrm{R}\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right);$$

mais l'équation $T + V = H$ n'aurait plus lieu.

4. Supposons que le corps m soit attiré vers un centre fixe par une force R fonction de la distance r du corps au centre, on aura simplement $V = \int R dr$.

Prenons la distance r pour l'une des coordonnées du corps, et prenons, pour les deux autres, l'angle ψ que le rayon vecteur r fait avec le plan des x et y, et l'angle φ que la projection de r sur ce plan fait avec l'axe des x; en plaçant l'origine des coordonnées rectangles x, y, z dans le centre des rayons r, de manière que l'on ait $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on trouve facilement

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

et de là

$$T = \frac{r^2(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{2dt^2}, \qquad V = \int R dr.$$

On aura donc ces trois équations différentielles relatives à r, ψ, φ,

$$d.\frac{\delta T}{\delta dr} - \frac{\delta T}{\delta r} + \frac{\delta V}{\delta r} = 0,$$

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi} = 0,$$

$$d.\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0,$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

lesquelles deviennent

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2)}{dt^2} + R = 0,$$

$$d.\frac{r^2 d\psi}{dt^2} + \frac{r^2 \sin\psi \cos\psi\, d\varphi^2}{dt^2} = 0,$$

$$d.\frac{r^2 \cos\psi^2\, d\varphi}{dt^2} = 0,$$

et l'équation $T + V = H$ donnera tout de suite cette première intégrale,

$$\frac{r^2(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{dt^2} + 2\int R\,dr = 2H,$$

dans laquelle H est une constante arbitraire.

5. La dernière des trois équations différentielles est intégrable d'elle-même; son intégrale est

$$\frac{r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{dt} = C,$$

C étant une constante arbitraire; et la seconde devient intégrable en y substituant pour $\frac{d\varphi}{dt}$ sa valeur $\frac{C}{r^2\cos\psi^2}$, tirée de celle-ci, et en la multipliant par $2r^2 d\psi$; l'intégrale est

$$\frac{r^4\, d\psi^2}{dt^2} + \frac{C^2}{\cos\psi^2} = E^2,$$

E étant une nouvelle constante arbitraire.

Je remarque d'abord sur cette intégrale, que si on suppose que ψ et $\frac{d\psi}{dt}$ soient nuls à la fois dans un instant, ils seront toujours nécessairement nuls; car en faisant pour un instant $\psi = 0$ et $\frac{d\psi}{dt} = 0$, la dernière équation donne $C^2 = E^2$; et elle devient, par la substitution de C^2 au lieu de E^2,

$$\frac{r^4 d\psi^2}{dt^2} + C^2 \tang\psi^2 = 0,$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

laquelle ne peut avoir lieu qu'en faisant

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

La supposition dont il s'agit revient à faire ensorte que le corps se meuve dans un instant dans le plan des x et y, ce qui est toujours possible, puisque la position de ce plan est arbitraire; alors le corps continuera de se mouvoir dans le même plan, et décrira nécessairement une orbite plane, c'est-à-dire une ligne à simple courbure. C'est ce qu'on peut aussi démontrer directement par l'intégration de la même équation.

Car en y substituant pour dt sa valeur tirée de la première intégrale, elle devient

$$\frac{C^2 d\psi^2}{\cos\psi^4\, d\varphi^2} + \frac{C^2}{\cos\psi^2} = E^2.$$

Soit, lorsque $\psi = 0$, $\frac{d\psi}{d\varphi} = \text{tang}\, i$, on aura

$$E^2 = C^2 + C^2 \,\text{tang}\, i^2 = \frac{C^2}{\cos i^2},$$

et la dernière équation se changera en

$$\frac{d\psi^2}{\cos\psi^4 d\varphi^2} = \frac{1}{\cos i^2} - \frac{1}{\cos\psi^2} = \text{tang}\, i^2 - \text{tang}\,\psi^2,$$

d'où l'on tire

$$d\varphi = \frac{d\psi}{\cos\psi^2 \sqrt{\text{tang}\, i^2 - \text{tang}\,\psi^2}},$$

équation séparée dont l'intégrale est

$$\varphi - h = \text{angle}\left(\text{sinus} = \frac{\text{tang}\,\psi}{\text{tang}\, i}\right),$$

ou bien

$$\text{tang}\,\psi = \text{tang}\, i \times \sin(\varphi - h),$$

h étant la valeur de φ lorsque $\psi = 0$.

Cette équation fait voir que $\varphi - h$ et ψ sont les deux côtés

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

d'un triangle sphérique rectangle dans lequel i est l'angle opposé au côté ψ. Ainsi puisque l'arc $\varphi - h$ est pris sur le plan des x, y, et que l'arc ψ est toujours perpendiculaire à ce même plan, il s'ensuit que l'arc qui joint ces deux-ci, et qui forme l'hypoténuse du triangle, fera avec la base $\varphi - h$ l'angle constant i; par conséquent cet arc passera par les extrémités de tous les arcs ψ, et tous les rayons r se trouveront dans le plan du même arc, lequel sera ainsi le plan de l'orbite du corps, dont l'inclinaison sur le plan des x et y sera l'angle constant i, et dont l'intersection avec ce même plan fera avec l'axe des x l'angle h.

Si, pour fixer les idées, on prend le plan des x et y pour l'écliptique, φ sera la longitude sur l'écliptique, ψ la latitude, h la longitude du nœud de l'orbite, et i son inclinaison.

6. Prenons maintenant l'intégrale

$$\frac{r^2(\cos\psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2) + dr^2}{dt^2} + 2\int R dr = 2H;$$

en y substituant pour $d\psi$ sa valeur en $d\varphi$ trouvée ci-dessus, elle devient

$$\frac{r^2 \cos\psi^4 d\varphi^2}{\cos i^2 dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} + 2\int R dr = 2H,$$

laquelle doit être combinée avec l'autre intégrale

$$\frac{r^2 \cos\psi^2 d\varphi}{dt} = C.$$

Si on y substitue la valeur de $d\varphi$ tirée de celle-ci, et qu'on fasse $\frac{C}{\cos i} = D$, on aura l'équation

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{D^2}{r^2} + 2\int R dr = 2H,$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2H - 2\int R dr - \frac{D^2}{r^2}}}.$$

En

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

En intégrant cette équation on aura l'expression de t en r, et réciproquement celle de r en t.

7. On aura ensuite φ par l'équation

$$d\varphi = \frac{D \cos i\, dt}{r^2 \cos \psi^2};$$

or, comme le plan des angles φ est arbitraire, si on le fait coïncider avec le plan de l'orbite, en faisant $i = 0$, on aura aussi $\psi = 0$ (art. 5), par conséquent $d\varphi = \frac{Ddt}{r^2}$, et dans ce cas, l'angle $d\varphi$ sera celui que le rayon r décrit dans le plan de l'orbite. Donc si on désigne en général cet angle par $d\Phi$, on aura $d\Phi = \frac{Ddt}{r^2}$, et substituant la valeur de dt en dr,

$$d\Phi = \frac{Ddr}{r^2 \sqrt{2H - 2\int Rdr - \frac{D^2}{r^2}}},$$

équation dont l'intégrale donnera la valeur de Φ en r, et réciproquement celle de r en Φ.

Ensuite on aura φ en Φ par l'équation

$$d\Phi = \frac{\cos \psi^2 d\varphi}{\cos i},$$

laquelle, en substituant pour $\cos \psi$ sa valeur tirée de l'équation $\tang \psi = \tang i \times \sin(\varphi - h)$ trouvée plus haut, devient

$$d\Phi = \frac{d\varphi}{\cos i\, [1 + \tang i^2 \sin(\varphi - h)^2]}$$
$$= \frac{\cos i\, d.\tang(\varphi - h)}{\cos i^2 + \tang(\varphi - h)^2},$$

d'où l'on tire par l'intégration

$$\Phi + k = \text{angl.}\left(\tang = \frac{\tang(\varphi - h)}{\cos i}\right),$$

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org

CAMBRIDGE

Cambridge University Press
978-1-108-00176-2 - Mecanique Analytique, Volume 2
Joseph Louis Lagrange
Excerpt
More information

k étant une constante arbitraire; et de là

$$\operatorname{tang}(\varphi - h) = \cos i \times \operatorname{tang}(\Phi + k),$$

équation qui indique que $\Phi + k$ est l'hypoténuse du même triangle sphérique rectangle dont la base est $\varphi - h$, et l'angle adjacent i (art. 5), et dont le côté opposé à i est ψ.

On voit par là que $\Phi + k$ est l'angle décrit par le rayon r dans le plan de l'orbite, et dont l'origine est à la ligne d'intersection de ce plan avec celui des x, y; que $\varphi - h$ est l'angle décrit par la projection de ce rayon sur le même plan, et que i est l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan fixe des x, y.

8. Le problème est donc résolu, puisqu'il ne dépend plus que de l'intégration des deux équations séparées entre t, Φ et r; les six constantes arbitraires nécessaires pour l'intégration complète des trois équations différentielles en r, φ et ψ seront i, h, D, H, et les deux que l'intégration introduira dans les valeurs de t et de Φ.

Dans la solution que nous venons de donner, nous avons pris pour coordonnées le rayon vecteur avec les deux angles de longitude et de latitude, pour nous conformer à l'usage des astronomes; aussi cette solution a-t-elle l'avantage d'offrir directement la plupart des théorèmes que l'on ne trouve ordinairement que par la Trigonométrie sphérique. Mais en l'envisageant du côté analytique, elle est moins simple que si on avait conservé les coordonnées rectangles primitives; c'est ce qu'il est bon de faire voir, d'autant qu'il en résultera de nouvelles formules qui pourront être utiles par la suite.

9. En prenant x, y, z pour les trois variables indépendantes, les formules générales de l'article 3 donnent tout de suite les trois

© in this web service Cambridge University Press www.cambridge.org