

CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematical Sciences

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Mécanique analytique

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), one of the notable French mathematicians of the Revolutionary period, is remembered for his work in the fields of analysis, number theory and mechanics. Like Laplace and Legendre, Lagrange was assisted by d'Alembert, and it was on the recommendation of the latter and the urging of Frederick the Great himself that Lagrange succeeded Euler as the director of mathematics at the Prussian Academy of Sciences in Berlin. The two-volume *Mécanique analytique* was first published in 1788; the edition presented here is that of 1811-15, revised by the author before his death. In this work, claimed to be the most important on classical mechanics since Newton, Lagrange developed the law of virtual work, from which single principle the whole of solid and fluid mechanics can be derived.

Cambridge University Press
978-1-108-00175-5 - Mécanique Analytique, Volume 1
Joseph-Louis Lagrange
Frontmatter
[More information](#)

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection will bring back to life books of enduring scholarly value (including out-of-copyright works originally issued by other publishers) across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press
978-1-108-00175-5 - Mécanique Analytique, Volume 1
Joseph-Louis Lagrange
Frontmatter
[More information](#)

Mécanique analytique

VOLUME 1

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE



CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Cambridge University Press
978-1-108-00175-5 - Mécanique Analytique, Volume 1
Joseph-Louis Lagrange
Frontmatter
[More information](#)

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore,
São Paulo, Delhi, Dubai, Tokyo

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org

Information on this title: www.cambridge.org/9781108001755

© in this compilation Cambridge University Press 2009

This edition first published 1811

This digitally printed version 2009

ISBN 978-1-108-00175-5 Paperback

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press wishes to make clear that the book, unless originally published by Cambridge, is not being republished by, in association or collaboration with, or with the endorsement or approval of, the original publisher or its successors in title.

Cambridge University Press
978-1-108-00175-5 - Mécanique Analytique, Volume 1
Joseph-Louis Lagrange
Frontmatter
[More information](#)

MÉCANIQUE
ANALYTIQUE.

Cambridge University Press
978-1-108-00175-5 - Mécanique Analytique, Volume 1
Joseph-Louis Lagrange
Frontmatter
[More information](#)

*On trouve chez M^{me} veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire, quai des Augustins,
les Ouvrages suivans du même Auteur.*

LEÇONS sur le Calcul des fonctions, nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée par l'Auteur,
un vol. in-8°, 1806. *Prix,* 6 fr. 50 c.

Traité de la résolution des Équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs
points de la théorie des Équations algébriques; nouvelle édit., revue et augmentée par l'Auteur,
un vol. in-4°, 1808. *Prix,* 12 fr.

Théorie des Fonctions analytiques, contenant les principes du Calcul différentiel dégagés de toute
considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à
l'Analyse algébrique des quantités finies, in-4° (au 5 de la République). *Prix,* 6 fr.

MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

*Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres
et Arts, du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat
Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur,
et Comte de l'Empire.*

NOUVELLE ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

TOME PREMIER.

PARIS,

M^{MS} V^E COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES.

1811.

AVERTISSEMENT.

ON a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité; il réunira et présentera sous un même point de vue, les différens principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue.

Je le divise en deux Parties; la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement; et dans chacune de ces Parties, je traite séparément des Corps solides et des Fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujéties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

Tel est le plan que j'avais tâché de remplir dans la
Méc. anal. Tome I. b

ij

AVERTISSEMENT.

première édition de ce Traité, publiée en 1788. Celle-ci est à plusieurs égards un Ouvrage nouveau sur le même plan, mais plus ample. On a donné plus de développement aux principes et aux formules générales, et plus d'étendue aux applications, dans lesquelles on trouvera la solution des principaux problèmes qui sont du ressort de la Mécanique.

On a conservé la notation ordinaire du Calcul différentiel, parce qu'elle répond au système des infiniment petits, adopté dans ce Traité. Lorsqu'on a bien conçu l'esprit de ce système, et qu'on s'est convaincu de l'exactitude de ses résultats par la méthode géométrique des premières et dernières raisons, ou par la méthode analytique des fonctions dérivées, on peut employer les infiniment petits comme un instrument sûr et commode pour abrégé et simplifier les démonstrations. C'est ainsi qu'on abrège les démonstrations des Anciens, par la méthode des indivisibles.

Nous allons indiquer les principales augmentations qui distinguent cette édition de la précédente. La première Section de la première Partie contient une analyse plus complète des trois principes de la Statique, avec des remarques nouvelles sur la nature et la liaison de ces principes; elle est terminée par une démonstration directe du principe des vitesses virtuelles, et tout-à fait indépendante des deux autres principes. Dans la seconde Section, on démontre d'une manière plus rigoureuse que le principe des vitesses virtuelles pour un nombre

AVERTISSEMENT.

iiij

quelconque de forces en équilibre, peut se déduire du cas où il n'y a que deux forces, ce qui ramène directement ce principe à celui du levier; on réduit à une forme plus générale les équations qui résultent de ce principe, et l'on donne les conditions nécessaires pour qu'un système de forces soit équivalent à un autre système de forces, et puisse le remplacer. Dans la troisième Section, on établit d'une manière plus directe les formules des mouvemens instantanés de rotation, et de la composition de ces mouvemens, et on en déduit la théorie des momens et de leur composition; on y expose une propriété peu connue du centre de gravité, et on donne une nouvelle démonstration des *maxima* et *minima* qui ont lieu dans l'état d'équilibre. La quatrième Section contient des formules plus générales et plus simples pour la solution des problèmes qui dépendent de la méthode des variations; et par la comparaison de ces formules avec celles de l'équilibre des corps de figure variable, on y montre comment les questions relatives à leur équilibre rentrent dans la classe de celles qui sont connues sous le nom de *problème général des isopérimètres*, et se résolvent de la même manière. La cinquième Section offre quelques problèmes nouveaux et des remarques importantes sur quelques-unes des solutions déjà données dans la première édition. Dans la sixième Section, on a ajouté quelques détails à l'analyse historique des principes de l'Hydrostatique. On a donné, dans la septième Section, plus de rigueur et de généralité au calcul des variations des molécules d'un fluide, et on a rendu beau-

AVERTISSEMENT.

coup plus simple l'analyse des termes qui se rapportent aux limites de la masse fluide ; on a déduit de ces termes la théorie de l'action des fluides sur les solides qu'ils recouvrent, ou sur les parois des vases qui les renferment, et on en a tiré une démonstration directe de ce théorème que , dans l'équilibre d'un solide avec un fluide, les forces qui agissent sur le solide sont les mêmes que si le fluide ne formait qu'une seule masse avec le solide. On a ajouté aussi, tant dans cette Section que dans la suivante qui traite de l'équilibre des fluides élastiques, quelques applications des formules générales de l'équilibre des fluides.

La deuxième Partie, qui contient la Dynamique, offre un plus grand nombre d'augmentations. Dans la première Section on a rendu plus complète et plus exacte dans quelques points l'analyse historique des principes de la Dynamique. Il y a dans la seconde Section une addition importante, où l'on montre dans quels cas la formule générale de la Dynamique, et par conséquent aussi les équations qui en résultent pour le mouvement d'un système de corps, sont indépendantes de la position des axes des coordonnées dans l'espace, ce qui donne le moyen de compléter une solution où l'on aurait supposées nulles quelques constantes, par l'introduction de trois nouvelles constantes arbitraires. Dans la troisième Section on a donné plus d'extension aux propriétés relatives au mouvement du centre de gravité et aux aires décrites par un système de corps ; on y a ajouté la théorie des axes principaux ou de rotation uniforme, déduite de

AVERTISSEMENT.

v

la considération des mouvemens instantanés de rotation, par une analyse différente de celle qu'on y avait employée jusqu'ici; et on y démontre quelques théorèmes nouveaux sur la rotation d'un corps solide ou d'un système de corps, lorsqu'elle dépend d'une impulsion primitive. La quatrième Section est à peu de chose près la même que dans la première édition; mais la cinquième Section est entièrement nouvelle; elle renferme la théorie de la variation des constantes arbitraires, qui a fait l'objet de trois Mémoires imprimés parmi ceux de la première Classe de l'Institut, pour l'année 1808, mais présentée d'une manière plus simple et comme une méthode générale d'approximation pour tous les problèmes de mécanique, où il y a des forces perturbatrices peu considérables par rapport aux forces principales.

Nous observerons ici, pour donner à cette théorie toute l'étendue dont elle est susceptible, que la fonction V , qui dépend des forces principales, ne peut être qu'une fonction exacte des seules variables indépendantes ξ, ψ, ϕ , etc., et du temps t , mais qu'il n'est pas nécessaire que la fonction désignée par Ω , et qui dépend des forces perturbatrices, soit aussi de la même nature. Quelles que soient ces forces, si on les décompose, pour chaque corps m du système, en trois X, Y, Z , suivant les coordonnées x, y, z , et tendantes à les augmenter, il n'y aura qu'à réduire ces coordonnées en fonctions des variables indépendantes ξ, ψ, ϕ , etc., et on pourra substituer à la place des différences partielles $\frac{d\Omega}{d\xi}, \frac{d\Omega}{d\psi}$, etc.

vj

AVERTISSEMENT.

les sommes respectives

$$\text{Sm} \left(X \frac{dx}{d\xi} + Y \frac{dy}{d\xi} + Z \frac{dz}{d\xi} \right), \text{Sm} \left(X \frac{dx}{d\downarrow} + Y \frac{dy}{d\downarrow} + Z \frac{dz}{d\downarrow} \right), \text{etc.}$$

et par conséquent à la place de $\Delta.\Omega$, la quantité

$$\text{Sm} (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z),$$

où la caractéristique Δ se rapporte aux constantes arbitraires; de sorte qu'on pourra changer $\frac{d\Omega}{d\alpha}$ en

$$\text{Sm} \left(X \frac{dx}{d\alpha} + Y \frac{dy}{d\alpha} + Z \frac{dz}{d\alpha} \right),$$

et ainsi des autres différences partielles de Ω . De cette manière, la méthode sera applicable à des forces perturbatrices représentées par des variables quelconques.

Enfin la sixième Section, qui est la dernière de ce volume, et qui répond au paragraphe premier de la cinquième Section de l'édition précédente, est augmentée de différentes remarques, et surtout de la solution de quelques problèmes sur les oscillations très-petites des corps; elle est terminée par la théorie des cordes vibrantes, que j'avais donnée dans le premier volume des Mémoires de Turin, et qui est présentée ici d'une manière plus simple et à l'abri des objections que d'Alembert avait faites contre cette théorie, dans le premier volume de ses Opuscules.

TABLE.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

PREMIÈRE PARTIE DE LA MÉCANIQUE, OU LA STATIQUE.

SECTION I. <i>Sur les différens principes de la Statique.</i>	Page 1
SECT. II. <i>Formule générale de la Statique pour l'équilibre d'un système quelconque de forces ; avec la manière de faire usage de cette formule.</i>	27
SECT. III. <i>Propriétés générales de l'équilibre d'un système de corps, déduites de la formule précédente.</i>	44
§ I. Propriétés de l'équilibre d'un système libre, relatives au mouvement de translation.	45
§ II. Propriétés de l'équilibre, relatives au mouvement de rotation.	48
§ III. De la composition des mouvemens de rotation autour de différens axes, et des momens relatifs à ces axes.	57
§ IV. Propriétés de l'équilibre, relatives au centre de gravité.	62
§ V. Propriétés de l'équilibre, relatives aux <i>maxima</i> et <i>minima</i> .	66
SECT. IV. <i>Manière plus simple et plus générale de faire usage de la formule de l'équilibre, donnée dans la seconde section.</i>	74
§ I. Méthode des multiplicateurs.	<i>Ibid.</i>
§ II. Application de la même méthode à la formule de l'équilibre des corps continus dont tous les points sont tirés par des forces quelconques.	76

vii	TABLE DES MATIÈRES.	
§ III.	Analogie des problèmes de ce genre avec ceux de <i>maximis et minimis</i> .	Page 88
SECT. V.	<i>Solution de différens problèmes de Statique.</i>	105
CHAP. I.	De l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point, et de la composition et décomposition des forces.	<i>Ibid.</i>
§ I.	De l'équilibre d'un corps ou point tiré par plusieurs forces.	106
§ II.	De la composition et décomposition des forces.	110
CHAP. II.	De l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un système de corps considérés comme des points, et liés entre eux par des fils ou par des verges.	116
§ I.	De l'équilibre de trois ou de plusieurs corps attachés à un fil inextensible, ou extensible et susceptible de contraction.	117
§ II.	De l'équilibre de trois ou de plusieurs corps attachés à une verge inflexible et roide.	127
§ III.	De l'équilibre de trois ou de plusieurs corps attachés à une verge à ressort.	134
CHAP. III.	De l'équilibre d'un fil dont tous les points sont tirés par des forces quelconques, et qui est supposé flexible ou inflexible, ou élastique, et en même temps extensible ou non.	136
§ I.	De l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.	137
§ II.	De l'équilibre d'un fil ou d'une surface flexible et en même temps extensible et contractible.	147
§ III.	De l'équilibre d'un fil ou lame élastique.	151
§ IV.	De l'équilibre d'un fil roide et de figure donnée.	159
CHAP. IV.	De l'équilibre d'un corps solide de grandeur sensible et de figure quelconque, dont tous les points sont tirés par des forces quelconques.	168
SECT. VI.	<i>Sur les principes de l'Hydrostatique.</i>	174
SECT. VII.	<i>De l'équilibre des fluides incompressibles.</i>	182
§ I.	De l'équilibre d'un fluide dans un tuyau très-étroit.	<i>Ibid.</i>
§ II.	Où l'on déduit les lois générales de l'équilibre des fluides incompressibles, de la nature des particules qui les composent.	188

TABLE DES MATIÈRES.

ix

§ III. De l'équilibre d'une masse fluide libre avec un solide qu'elle recouvre.	Page 204
§ IV. De l'équilibre des fluides incompressibles contenus dans des vases.	212
SECT. VIII. De l'équilibre des fluides compressibles et élastiques.	215

SECONDE PARTIE DE LA MÉCANIQUE,

OU LA DYNAMIQUE.

SECTION I. <i>Sur les différens principes de la Dynamique.</i>	221
SECT. II. <i>Formule générale de la Dynamique, pour le mouvement d'un système de corps animés par des forces quelconques.</i>	247
SECT. III. <i>Propriétés générales du mouvement, déduites de la formule précédente.</i>	257
§ I. Propriétés relatives au centre de gravité.	<i>Ibid.</i>
§ II. Propriétés relatives aux aires.	262
§ III. Propriétés relatives aux rotations produites par des forces d'impulsion.	271
§ IV. Propriétés des axes fixes de rotation d'un corps libre, de figure quelconque.	278
§ V. Propriétés relatives aux forces vives.	289
§ VI. Propriétés relatives à la moindre action.	296
SECT. IV. <i>Équations différentielles pour la solution de tous les problèmes de Dynamique.</i>	304
SECT. V. <i>Méthode générale d'approximation pour les problèmes de Dynamique, fondée sur la variation des constantes arbitraires.</i>	325

x

TABLE DES MATIÈRES.

- § I, Où l'on déduit des équations données dans la section précédente, une relation générale entre les variations des constantes arbitraires. P. 324
- § II, Où l'on donne les équations différentielles les plus simples pour déterminer les variations des constantes arbitraires, dues à des forces perturbatrices. 329
- § III, Où l'on démontre une propriété importante de la quantité qui exprime la force vive dans un système troublé par des forces perturbatrices. 342
- SECT. VI. *Sur les oscillations très-petites d'un système quelconque de corps.* 347
- § I. Solution générale du problème des oscillations très-petites d'un système de corps, autour de leurs points d'équilibre. *Ibid.*
- § II. Des oscillations d'un système linéaire de corps. 367
- § III, Où l'on applique les formules précédentes aux vibrations d'une corde tendue et chargée de plusieurs corps, et aux oscillations d'un fil inextensible, chargé d'un nombre quelconque de poids, et suspendu par ses deux bouts ou par un seulement. 382
- § IV. Sur les vibrations des cordes sonores, regardées comme des cordes tendues, chargées d'une infinité de petits poids infiniment proches l'un de l'autre; et sur la discontinuité des fonctions arbitraires. 398

FIN DE LA TABLE DU PREMIER VOLUME,