MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

LA STATIQUE.

SECTION PREMIÈRE.

Sur les différens Principes de la Statique.

La Statique est la science de l'équilibre des forces. On entend en général par *force* ou *puissance* la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée; et c'est aussi par la quantité du mouvement imprimé, ou prêt à imprimer, que la force ou puissance doit s'estimer. Dans l'état d'équilibre la force n'a pas d'exercice actuel; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement; mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle produirait si elle n'était pas arrêtée. En prenant une force quelconque, ou son effet pour l'unité, l'expression de toute autre force n'est plus qu'un rapport, une quantité mathématique qui peut être représentée par des nombres ou des lignes; c'est sous ce point de vue que l'on doit considérer les forces dans la Mécanique.

L'équilibre résulte de la destruction de plusieurs forces qui se combattent et qui anéantissent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes sur les autres; et le but de la Statique est de donner les lois suivant lesquelles cette destruction s'opère. Ces lois sont fondées sur des principes généraux qu'on peut réduire à trois; celui du *levier*, celui de la *composition des forces*, et celui des *vitesses virtuelles*.

1. Archimède, le seul parmi les Anciens qui nous ait laissé une théorie de l'équilibre, dans ses deux Livres *de Æquiponderantibus*, ou *de Planorum æquilibriis*, est l'auteur du principe du levier, lequel consiste, comme le savent tous les mécaniciens, en ce que si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés de part et d'autre du point d'appui, à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier sera en équilibre, et son appui sera chargé de la somme des deux poids. Archimède prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui, pour un axiome de Mécanique évident de soi-même, ou du moins pour un principe d'expérience; et il ramène à ce cas simple et primitif celui des poids inégaux, en imaginant ces poids lorsqu'ils sont commensurables, divisés en plusieurs parties toutes égales entre elles, et en supposant que les parties de chaque poids soient séparées et transportées de part et d'autre sur le même levier, à des distances égales, ensorte que le levier se trouve chargé de plusieurs petits poids égaux et placés à distances égales autour du point d'appui. Ensuite il démontre la vérité du même theorème pour les poids incommensurables, à l'aide de la méthode d'exhaustion, en faisant voir qu'il ne saurait y avoir équilibre entre ces poids, à moins qu'ils ne soient en raison inverse de leurs distances au point d'appui.

Quelques auteurs modernes, comme Stevin dans sa Statique, et Galilée dans ses Dialogues sur le mouvement, ont rendu la démonstration d'Archimède plus simple, en supposant que les poids attachés au levier soient deux parallélépipèdes horizontaux pendus par leur milieu, et dont les largeurs et les hauteurs soient égales, mais dont les longueurs soient doubles des bras de levier qui leur répondent inversement. Car de cette manière les deux parallélépipèdes sont en raison inverse de leurs bras de levier, et en même temps ils se trouvent placés bout-à-bout, ensorte qu'ils n'en forment plus qu'un seul dont le point du milieu répond précisément au point d'appui du levier. Archimède avait déjà employé une considération semblable pour déterminer le centre de gravité d'une grandeur composée de deux surfaces paraboliques, dans la première proposition du second Livre de l'Équilibre des plans.

D'autres auteurs, au contraire, ont cru trouver des défauts dans la démonstration d'Archimède, et ils l'ont tournée de différentes façons, pour la rendre plus rigoureuse; mais il faut convenir qu'en altérant la simplicité de cette démonstration, ils n'y ont presque rien ajouté du côté de l'exactitude.

Cependant parmi ceux qui ont cherché à suppléer à la démonstration d'Archimède, sur l'équilibre du levier, on doit distinguer Huyghens, dont on a un petit écrit intitulé *Demonstratio æquilibrii bilancis*, et imprimé en 1693, dans le Recueil des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences.

Huyghens observe qu'Archimède suppose tacitement que si plusieurs poids égaux sont appliqués à un levier horizontal, à distances égales les uns des autres, ils exercent la même force pour incliner le levier, soit qu'ils se trouvent tous du même côté du point d'appui, soit qu'ils soient les uns d'un côté et les autres de l'autre côté du point d'appui; et pour éviter cette supposition précaire, au lieu de distribuer, comme Archimède, les parties aliquotes des deux poids commensurables sur le même levier, de part et d'autre des points où les poids entiers sont censés appliqués, il les distribue de la même manière, mais sur deux autres leviers horizontaux et placés perpendiculairement aux extrémités du levier principal, en forme de T; de cette manière, on a un plan horizontal chargé de plusieurs poids égaux, et qui est évidemment en équilibre sur la ligne du premier levier, parce que les poids se trouvent distribués également et symétriquement des deux côtés de cette ligne; mais Huyghens démontre que ce plan est aussi en équilibre sur une droite inclinée à celle-là, et passant par le point qui divise le levier primitif en parties réciproquement proportionnelles aux poids dont il est supposé chargé, parce qu'il fait voir que les petits poids se trouvent aussi placés à distances égales de part et d'autre de la même droite: d'où il conclut que le plan, et par conséquent le levier proposé doit être en équilibre sur le même point.

Cette démonstration est ingénieuse, mais elle ne supplée pas entièrement à ce qu'on peut en effet desirer dans celle d'Archimède.

2. L'équilibre d'un levier droit et horizontal, dont les extrémités sont chargées de poids égaux, et dont le point d'appui est au milieu du levier, est une vérité évidente par elle-même, parce qu'il n'y a pas de raison pour que l'un des poids l'emporte sur l'autre, tout étant égal de part et d'autre du point d'appui. Il n'en est pas de même de la supposition que la charge de l'appui soit égale à la somme des deux poids. Il paraît que tous les mécaniciens l'ont prise comme un résultat de l'expérience journalière, qui apprend que le poids d'un corps ne dépend que de sa masse totale, et nullement de sa figure (*). On peut néanmoins déduire cette vérité de la première, en considérant, comme Huyghens, l'équilibre d'un plan sur une ligne.

Pour cela, il n'y a qu'à imaginer un plan triangulaire chargé de deux poids égaux aux deux extrémités de sa base, et d'un poids

(*) D'Alembert est, je crois, le premier qui ait cherché à démontrer cette proposition; mais la démonstration qu'il en a donnée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1769, n'est pas entièrement satisfaisante. Celle que M. Fourier a donnée depuis dans le cinquième cahier du Journal de l'École Polytechnique, est rigoureuse et très-ingénieuse; mais elle n'est pas tirée de la nature du levier.

double à son sommet. Ce plan sera évidemment en équilibre, étant appuyé sur une ligne droite ou axe fixe, qui passe par le milieu des deux côtés du triangle; car on peut regarder chacun de ces côtés comme un levier chargé dans ses deux extrémités de deux poids égaux, et qui a son point d'appui sur l'axe qui passe par son milieu. Maintenant on peut envisager cet équilibre d'une autre manière, en regardant la base même du triangle comme un levier dont les extrémités sont chargées de deux poids égaux; et en imaginant un levier transversal qui joigne le sommet du triangle et le milieu de sa base en forme de T, et dont une des extrémités soit chargée du poids double placé au sommet, et l'autre serve de point d'appui au levier qui forme la base. Il est évident que ce dernier levier sera en équilibre sur le levier transversal qui le soutient dans son milieu, et que celui-ci sera par conséquent en équilibre sur l'axe sur lequel le plan est déjà en équilibre. Or comme l'axe passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passera aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu de sa base; donc le levier transversal aura son point d'appui dans le point de milieu, et devra par conséquent être chargé également aux deux bouts. Donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet, et par conséquent égale à la somme des deux poids.

Si, au lieu d'un triangle, on considérait un trapèze chargé à ses quatre angles de quatre poids égaux, on trouverait de la même manière, que les deux leviers de longueurs inégales, formant les côtés parallèles du trapèze, exercent sur leurs points d'appui des forces égales.

3. Cette proposition une fois établie, il est clair qu'on peut, ainsi qu'Archimède le fait, substituer à un poids en équilibre sur un levier, deux poids égaux chacun à la moitié de ce poids, et placés sur le même levier, à distances égales de part et d'autre du point

où le poids est attaché. Car l'action de ce poids est la même que celle d'un levier suspendu par son milieu au même point, et chargé à ses deux bouts, de deux poids égaux chacun à la moitié du même poids, et il est évident que rien n'empêche d'approcher ce dernier levier du premier, de manière qu'il en fasse partie; ou bien, ce qui est peut-être plus rigoureux, il n'y a qu'à regarder ce dernier levier comme étant tenu en équilibre par une force appliquée à son point de milieu, dirigée de bas en haut et égale au poids dont les deux moitiés sont censées appliquées à ses extrémités; alors en appliquant ce levier en équilibre, sur le premier levier qui est supposé en équilibre sur son point d'appui, l'équilibre total subsistera toujours, et si l'application se fait de manière que le milieu du second levier coïncide avec l'extrémité d'un des bras du premier levier, la force qui soutient le second levier pourra être censée appliquée au poids même dont ce bras est chargé, et qui, étant soutenu, n'aura plus d'action sur le levier, mais se trouvera ainsi remplacé par deux poids égaux chacun à sa moitié et placé de part et d'autre de ce poids sur le premier levier prolongé. Cette superposition d'équilibres est en Mécanique un principe aussi fécond que l'est en Géométrie la superposition des figures.

4. On peut donc regarder l'équilibre d'un levier droit et horizontal chargé de deux poids en raison inverse de leurs distances au point d'appui du levier, comme une vérité rigoureusement démontrée; et par le principe de la superposition, il est facile de l'étendre à un levier angulaire quelconque, dont le point d'appui serait dans l'angle, et dont les bras seraient tirés en sens contraire par des forces perpendiculaires à leurs directions. En effet, il est évident qu'un levier angulaire à bras égaux, et mobile autour du sommet de l'angle, sera tenu en équilibre par deux forces égales appliquées perpendiculairement aux extrémites des deux bras, et tendantes à les faire tourner en sens contraire. Si donc on a un levier droit en équilibre, dont l'un des bras soit égal à ceux du levier angulaire,

et soit chargé à son extrémité d'un poids équivalent à chacune des puissances appliquées au levier angulaire, l'autre bras étant chargé du poids nécessaire pour l'équilibre; et qu'on superpose ces leviers de manière que le sommet de l'angle de l'un tombe sur le point d'appui de l'autre, et que les bras égaux de l'un et de l'autre coïncident et n'en forment plus qu'un : la puissance appliquée au bras du levier angulaire soutiendra le poids suspendu au bras égal du levier droit, de manière qu'on pourra faire abstraction de l'un et de l'autre, et supposer le bras formé de la réunion de ces deux-ci anéanti. L'équilibre subsistera donc encore entre les deux autres bras formant un levier angulaire tiré à ses extrémités par des forces perpendiculaires, et en raison inverse de la longueur des bras comme dans le levier droit.

Or une force peut être censée appliquée à tel point que l'on veut de sa direction. Donc deux forces, appliquées à des points quelconques d'un plan retenu par un point fixe, et dirigées comme on voudra dans ce plan, sont en équilibre lorsqu'elles sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées de ce point sur leurs directions; car on peut regarder ces perpendiculaires comme formant un levier angulaire dont le point d'appui est le point fixe du plan : c'est ce qu'on appelle maintenant le principe *des momens*, en entendant par moment le produit d'une force par le bras du levier par lequel elle agit.

Ce principe général suffit pour résoudre tous les problèmes de la Statique. La considération du treuil l'avait fait apercevoir dès les premiers pas que l'on a faits après Archimède, dans la théorie des machines simples, comme on le voit par l'ouvrage du Guide Ubaldi, intitulé *Mecanicorum liber*, qui a paru à Pesaro, en 1577; mais cet auteur n'a pas su l'appliquer au plan incliné, ni aux autres machines qui en dépendent, comme le coin et la vis dont il n'a donné qu'une théorie peu exacte.

5. Le rapport de la puissance au poids sur un plan incliné a été

long-temps un problème parmi les Mécaniciens modernes. Stevin l'a résolu le premier ; mais sa solution est fondée sur une considération indirecte et indépendante de la théorie du levier.

Stevin considère un triangle solide posé sur sa base horizontale, ensorte que ses deux côtés forment deux plans inclinés ; et il imagine qu'un chapelet formé de plusieurs poids égaux, enfilés à des distances égales, ou plutôt une chaîne d'égale grosseur soit placée sur les deux côtés de ce triangle, de manière que toute la partie supérieure se trouve appliquée aux deux côtés du triangle, et que la partie inférieure pende librement au-dessous de la base, comme si elle était attachée aux deux extrémités de cette base.

Or Stevin remarque qu'en supposant que la chaîne puisse glisser librement sur le triangle, elle doit cependant demeurer en repos ; car si elle commençait à glisser d'elle-même dans un sens, elle devrait continuer à glisser toujours, puisque la même cause de mouvement subsisterait, la chaîne se trouvant, à cause de l'uniformité de ses parties, placée toujours de la même manière sur le triangle, d'où résulterait un mouvement perpétuel, ce qui est absurde.

Il y a donc nécessairement équilibre entre toutes les parties de la chaîne ; or on peut regarder la portion qui pend au-dessous de la base, comme étant déjà en équilibre d'elle-même ; donc il faut que l'effort de tous les poids appuyés sur l'un des côtés, contrebalance l'effort des poids appuyés sur l'autre côté ; mais la somme des uns est à la somme des autres, dans le même rapport que les longueurs des côtés sur lesquels ils sont appuyés. Donc il faudra toujours la même puissance pour soutenir un ou plusieurs poids placés sur un plan incliné, lorsque le poids total sera proportionnel à la longueur du plan, en supposant la hauteur la même ; mais quand le plan est vertical, la puissance est égale au poids ; donc, dans tout plan incliné, la puissance est au poids comme la hauteur du plan à sa longueur.

J'ai rapporté cette démonstration de Stevin, parce qu'elle est très-ingénieuse, et qu'elle est d'ailleurs peu connue. Au reste, Stevin

déduit

déduit de cette théorie celle de l'équilibre entre trois puissances qui agissent sur un même point, et il trouve que cet équilibre a lieu lorsque les puissances sont parallèles et proportionnelles aux trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque. Voyez les Elémens de Statique et les Additions à la Statique de cet auteur, dans les *Hypomnemata Mathematica*, imprimés à Leyde, en 1605, et dans les Œuvres de Stevin, traduites en français, et imprimées en 1634, par les Elzevirs. Mais on doit observer que ce théorème fondamental de la Statique, quoiqu'il soit communément attribué à Stevin, n'a cependant été démontré par cet auteur, que dans le cas ou les directions de deux des puissances font entre elles un angle droit.

Stevin remarque avec raison qu'un poids appuyé sur un plan incliné et retenu par une puissance parallèle au plan, est dans le même cas que s'il était soutenu par deux fils, l'un perpendiculaire et l'autre parallèle au plan; et par sa théorie du plan incliné, il trouve que le rapport du poids à la puissance parallèle au plan, est comme l'hypoténuse à la base d'un triangle rectangle formé sur le plan par deux droites, l'une verticale et l'autre perpendiculaire au plan. Stevin se contente ensuite d'étendre cette proportion au cas où le fil qui retient le poids sur le plan incliné serait aussi incliné à ce plan, en construisant un triangle analogue avec les mêmes lignes, l'une verticale, l'autre perpendiculaire au plan, et en prenant la base dans la direction du fil; mais il faudrait pour cela qu'il eût démontré que la même proportion a lieu dans l'équilibre d'un poids soutenu sur un plan incliné par une puissance oblique au plan, ce qui ne peut pas se déduire de la considération de la chaîne imaginée par Stevin.

6. Dans les *Mécaniques* de Galilée, publiées d'abord en français par le père Mersenne en 1634, l'équilibre sur un plan incliné est réduit à celui d'un levier angulaire à deux bras égaux, dont l'un est supposé perpendiculaire au plan, et chargé du poids appuyé

sur le plan, et dont l'autre est horizontal et chargé d'un poids équivalant à la puissance nécessaire pour retenir le poids sur le plan; cet équilibre est ensuite réduit à celui d'un levier droit et horizontal, en regardant le poids attaché au bras incliné, comme suspendu à un bras horizontal formant un levier droit avec le bras horizontal du levier angulaire. Ainsi le poids est à la puissance qui le soutient sur le plan incliné, en raison inverse de ces deux bras du levier droit, et il est facile de prouver que ces bras sont entre eux comme la hauteur du plan à sa longueur.

On peut dire que c'est là la première démonstration directe qu'on ait eue de l'équilibre sur un plan incliné. Galilée s'en est servi depuis pour démontrer rigoureusement l'égalité des vîtesses acquises par les corps pesans, en descendant d'une même hauteur sur des plans diversement inclinés, égalité qu'il s'était contenté de supposer dans la première édition de ses Dialogues.

Il eût été facile à Galilée de résoudre aussi le cas où la puissance qui retient le poids a une direction oblique au plan; mais ce nouveau pas n'a été fait que quelque temps après, par Roberval, dans un Traité de Mécanique imprimé en 1636, dans l'*Harmonie universelle* de Mersenne.

7. Roberval regarde aussi le poids appuyé sur le plan incliné comme attaché au bras d'un levier perpendiculaire au plan, et il considère la puissance comme une force appliquée au même bras, suivant une direction donnée; il a ainsi un levier à un seul bras, dont une extrémité est fixe, et dont l'autre extrémité est tirée par deux forces, celle du poids et celle de la puissance qui le retient; il substitue ensuite à ce levier un levier angulaire à deux bras perpendiculaires aux directions des deux forces et ayant le même point fixe pour point d'appui, et il suppose les deux forces appliquées aux bras de ce levier suivant leurs propres directions, ce qui lui donne pour l'équilibre le rapport du poids à la puissance, en raison inverse des deux bras du levier angulaire, c'est-à-dire des perpendiculaires