CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

Books of enduring scholarly value

Mathematical Sciences

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

Essai sur la théorie des nombres

Adrien-Marie Legendre (1752–1833), one of the great French mathematicians active in the Revolutionary period, made important contributions to number theory, statistics, mathematical analysis and algebra. He taught at the École Militaire, where he was a colleague of Laplace, and made his name with a paper on the trajectory of projectiles which won a prize of the Berlin Academy in 1782, and brought him to the attention of Lagrange. In 1794 he published Eléments de géométrie, which remained a textbook for over 100 years. The first edition of his Essai sur la théorie des nombres was published in 1798, and the much improved second edition, which is offered here, in 1808. In it Legendre had taken account of criticism by Gauss of the mathematical proofs in the first edition, though he was bitter at the manner in which his younger rival had claimed credit for some of his solutions.

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection will bring back to life books of enduring scholarly value across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press
978-1-108-00173-1 - Essai Sur La Theorie Des Nombres
Adrien-Marie Legendre
Frontmatter
More information

Essai sur la théorie des nombres

Adrien-Marie Legendre

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge New York Melbourne Madrid Cape Town Singapore São Paolo Delhi

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

www.cambridge.org
Information on this title: www.cambridge.org/9781108001731

This edition first published 1808
This digitally printed version 2009

ISBN 978-1-108-00173-1

ESSAI
SUR LA THÉORIE
DES NOMBRES;

PAR A. M. LEGENDRE,

Membre de l'Institut et de la Légion d'Honneur, Conseiller titulaire de l'Université Impériale.

SECONDE ÉDITION.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

AVERTISSEMENT.

On a tâché de faire disparaître dans cette seconde Édition la plus grande partie des imperfections ou même des erreurs qui étaient restées dans la première, malgré les soins qu'on y avait apportés. Les changemens sont tels, qu'une moitié environ du volume est devenue un ouvrage nouveau.

L'Introduction a été refondue presqu'en entier, et corrigée d'une erreur qui s'était glissée dans les derniers articles.

La première partie a été augmentée de quelques Théorèmes sur les équations indéterminées, et d'une Méthode nouvelle pour l'approximation des racines imaginaires.

Dans la deuxième partie la démonstration de la loi de réciprocité, entre deux nombres premiers, a été perfectionnée à quelques égards.

La théorie contenue dans la troisième partie a été présentée d'une manière nouvelle et entièrement rigoureuse.

La quatrième partie a été augmentée de plusieurs paragraphes sur différens sujets. Dans l'un d'eux on démontre que toute progression arithmétique (excepté celles dont tous les termes ont un commun diviseur) contient une infinité de nombres premiers.

Enfin il a été ajouté une cinquième partie où l'on expose avec tout le détail nécessaire, la belle théorie de la résolution de l'équation $x^n - 1 = 0$, donnée par M. Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ.*

Cet ouvrage qui parut à Léipsick en 1801, et qui plaça tout d'un coup son auteur au rang des Analystes les plus célèbres, contient beaucoup de choses analogues à celles qui sont traitées dans l'Essai sur la Théorie des Nombres, publié en 1798. Il contient particulièrement une démonstration directe et fort ingénieuse de la loi de réciprocité déjà citée; démonstration qu'on se proposait d'insérer avec des développemens plus étendus, dans cette seconde Edition. Mais l'Auteur étant parvenu depuis à en trouver une beaucoup plus simple et plus élégante, on a exposé de préférence cette dernière dans le § VII de la quatrième partie.

On aurait desiré enrichir cet Essai d'un plus grand nombre des excellens matériaux qui composent l'ouvrage de M. Gauss : mais les méthodes de cet auteur lui sont tellement particulières qu'on n'aurait pu, sans des circuits très-étendus, et sans s'assujétir au simple rôle de traducteur, profiter de ses autres découvertes.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

A EN juger par différens fragmens qui nous restent, et dont quelques-uns sont consignés dans Euclide, il paraît que les anciens Philosophes avaient fait des recherches assez étendues sur les propriétés des nombres. Mais il leur manquait deux instrumens pour approfondir cette science; l'art de la numération qui sert à exprimer les nombres avec beaucoup de facilité, et l'Algèbre qui généralise les résultats et qui peut opérer également sur les connues et les inconnues. L'invention de l'un et l'autre de ces arts dut donc influer beaucoup sur les progrès de la science des nombres. Aussi voit-on que l'ouvrage de Diophante d'Alexandrie, le plus ancien auteur d'Algèbre qu'on connaisse, est entièrement consacré aux nombres, et renferme des questions difficiles résolues avec beaucoup d'adresse et de sagacité.

Depuis Diophante jusqu'au temps de Viète et de Bachet, les Mathématiciens continuèrent de s'occuper des nombres, mais sans beaucoup de succès, et sans faire avancer sensiblement la science.

Viète, en ajoutant de nouveaux degrés de perfection à l'Algèbre, résolut plusieurs problèmes difficiles sur les nombres. Bachet, dans son ouvrage intitulé *Problèmes plaisans et délec-*

tables, résolut l'équation indéterminée du premier degré par une méthode générale et fort ingénieuse. On doit à ce même savant un excellent commentaire sur Diophante, qui fut depuis enrichi des notes marginales de Fermat.

Fermat, l'un des Géomètres dont les travaux contribuèrent le plus à accélérer la découverte des nouveaux calculs, cultiva avec un grand succès la science des nombres, et s'y fraya des routes nouvelles. On a de lui un grand nombre de Théorèmes intéressans, mais il les a laissés presque tous sans démonstration. C'était l'esprit du temps de se proposer des problèmes les uns aux autres. On cachait le plus souvent sa méthode, afin de se réserver des triomphes nouveaux tant pour soi que pour sa nation; car il y avait surtout rivalité entre les Géomètres français et les anglais. De là il est arrivé que la plupart des démonstrations de Fermat ont été perdues, et le peu qui nous en reste, nous fait regretter d'autant plus celles qui nous manquent.

Depuis Fermat jusqu'à Euler, les Géomètres, livrés entièrement à la découverte ou à l'application des nouveaux calculs, ne s'occupèrent point de la Théorie des Nombres. Euler, le premier, s'attacha à cette partie; les nombreux Mémoires qu'il a publiés sur cette matière dans les Commentaires de Pétersbourg, et dans d'autres ouvrages, prouvent combien il avait à cœur de faire faire à la science des Nombres les mêmes progrès dont la plupart des autres parties des Mathématiqeus lui étaient redevables. Il est à croire aussi qu'Euler avait un goût particulier pour ce genre de recherches, et qu'il s'y livrait avec une sorte de passion, comme il arrive à presque tous ceux qui s'en occupent. Quoi qu'il en soit, ses savantes recherches le conduisirent à démontrer deux des principaux Théorèmes de Fermat, savoir, 1°. que si a est un nombre premier, et x un nombre quelconque non divisible par a, la formule $x^{a-1}-1$ est toujours divisible par a; 2°. que tout nombre premier de forme $4n+1$, est la somme de deux quarrés.

Une multitude d'autres découvertes importantes se font remarquer dans les Mémoires d'Euler. On y trouve la théorie des diviseurs de la quantité $a^n \pm b^n$, le traité *de partitione numerorum*, qui est inséré aussi dans son *Introd. in Anal. infinit.*, l'usage des facteurs imaginaires ou irrationnels dans la résolution des équations indéterminées, la résolution générale des équations indéterminées du second degré, en supposant qu'on en connaisse une solution particulière; la démonstration de beaucoup de Théorèmes sur les puissances des nombres, et particulièrement de ces propositions négatives avancées par Fermat; que la somme ou la différence de deux cubes ne peut être un cube, et que la somme ou la différence de deux biquarrés ne peut être un quarré. Enfin on trouve dans ces mêmes écrits un grand nombre de questions indéterminées résolues par des artifices analytiques très-ingénieux.

Euler a été pendant long-temps presque le seul Géomètre qui se soit occupé de la Théorie des Nombres. Enfin Lagrange est entré aussi dans la même carrière, et ses premiers pas ont été signalés par des succès égaux à ceux qu'il avait déjà obtenus dans des recherches d'un genre plus sublime. Une méthode générale pour résoudre les équations indéterminées du second degré, et, ce qui était plus difficile, une méthode pour les résoudre en nombres entiers, fut le coup d'essai de ce savant illustre; bientôt après il appliqua les fractions continues à cette

b

branche d'analyse; il démontra le premier que la fraction continue égale à la racine d'une équation rationnelle du second degré, devait être périodique, et il en conclut que le problème de Fermat, concernant l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$, est toujours résoluble; proposition qui n'avait pas encore été établie d'une manière rigoureuse, quoique plusieurs Géomètres eussent donné des méthodes pour la résolution de cette équation.

Le même savant, par des recherches ultérieures qui sont consignées dans les Mémoires de Berlin, a démontré le premier que tout nombre entier est la somme de quatre quarrés; on lui doit également plusieurs autres démonstrations importantes, mais la plus remarquable de ses découvertes est une méthode générale de laquelle découlent comme corollaires une infinité de Théorèmes sur les nombres premiers.

Cette méthode, singulièrement féconde, est fondée sur la considération des formes tant quadratiques que linéaires qui conviennent aux diviseurs de la formule $t^2 + au^2$, où t et u sont deux indéterminées, et a un nombre donné. Il restait cependant à établir, d'une manière générale, la relation qui doit exister entre les formes linéaires et les formes quadratiques appliquées aux nombres premiers; car au défaut du principe qui contient cette relation (1), la Théorie de Lagrange, qui donne une infinité de Théorèmes pour les nombres premiers $4n + 3$, n'en fournit qu'un très-petit nombre relatifs aux nombres premiers $4n + 1$.

Un Mémoire que j'ai publié dans le volume de l'Académie

(1) Voyez sur cet objet les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, année 1775, pag. 350 et 352.

des Sciences pour l'année 1785, offre les moyens de démontrer le principe dont il s'agit, et renferme d'ailleurs des propositions qui paraissent avancer la science des nombres. J'y ai donné 1°. la démonstration d'un Théorème pour juger de la possibilité ou de l'impossibilité de toute équation indéterminée du second degré, ramenée à la forme $ax^2 + by^2 = cz^2$; 2°. la démonstration d'une loi générale qui existe entre deux nombres premiers quelconques, et qu'on peut appeler *loi de réciprocité*; 3°. l'application de cette loi à diverses propositions, et son usage, tant pour perfectionner la Théorie de Lagrange, que pour vaincre d'autres difficultés du même genre.

Le même Mémoire contient en outre l'ébauche d'une théorie entièrement nouvelle sur les nombres considérés en tant qu'ils sont décomposables en trois quarrés; théorie à laquelle appartient le fameux Théorème de Fermat, qu'un nombre quelconque est la somme de trois triangulaires, et cet autre Théorème du même auteur, que tout nombre premier $8n + 7$ est de la forme $p^2 + q^2 + 2r^2$.

Depuis l'époque de la publication de ce Mémoire, je me suis occupé à diverses reprises de développer les vues qu'il contient, et d'apporter quelques perfectionnemens à différens points de la Théorie des Nombres ou de l'Analyse indéterminée (1). Mes recherches à cet égard ayant été suivies de

(1) Je ne sépare point la Théorie des Nombres de l'Analyse indéterminée, et je regarde ces deux parties comme ne faisant qu'une seule et même branche de l'Analyse algébrique. En effet, il n'est pas de Théorème sur les nombres qui ne soit relatif à la résolution d'une ou de plusieurs équations indéterminées. Ainsi quand on assure, d'après Fermat, que tout nombre premier $4n + 1$ est la somme de deux quarrés, c'est comme

quelques succès, je me proposais d'abord d'en publier le résultat dans un Mémoire particulier ; j'ai cru ensuite devoir profiter de cette occasion pour traiter la Théorie des Nombres avec plus d'étendue qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, et en y comprenant le résultat des principales recherches d'Euler et de Lagrange sur la même matière.

C'est ainsi que je me suis déterminé à composer l'ouvrage que j'offre en ce moment au Public; je le donne non comme un traité complet, mais simplement comme un essai qui fera connaître à-peu-près l'état actuel de la science, et qui contribuera peut-être à en accélérer les progrès. . . . .

si on disait que l'équation $A = y^2 + z^2$ est toujours résoluble tant que A est un nombre premier de la forme $4n + 1$. On peut ajouter que dans ce même cas l'équation $A = y^2 + z^2$ n'aura jamais qu'une solution, ce qui est un second Théorème contenant une propriété caractéristique des nombres premiers $4n + 1$.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION,

Contenant des notions générales sur les Nombres.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE DIVERSES MÉTHODES ET PROPOSITIONS RELATIVES A L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

SECONDE PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES NOMBRES.

TROISIÈME PARTIE.

THÉORIE DES NOMBRES CONSIDÉRÉS COMME DÉCOMPOSABLES EN TROIS QUARRÉS.

QUATRIÈME PARTIE.

MÉTHODES ET RECHERCHES DIVERSES.

TABLES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pag. 228,	lign. 21.......	$t^2c + cu^2$,	*lisez*	$t^2 + cu^2$
232,	2 et 6...	a aura		*a* aura
265,	34.......	$\mu m^2 + \nu n^2$		$m\mu^2 + n\nu^2$
384,	23.......	pusique		puisque
456,	avant-dern.	pouvant		peuvent