Cambridge University Press
978-1-108-00173-1 - Essai Sur La Theorie Des Nombres
Adrien-Marie Legendre
Excerpt
More information

ESSAI

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES.

INTRODUCTION

CONTENANT DES NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES NOMBRES.

NOTRE objet, dans cette Introduction, est de présenter quelques considérations générales sur la nature des nombres, et particulièrement sur celle des nombres premiers. Mais, avant tout, nous croyons devoir nous occuper de quelques propositions fondamentales, dont la démonstration ne se trouve pas dans les Traités ordinaires d'Arithmétique, ou du moins n'y est présentée que d'une manière peu rigoureuse.

I. Nous examinerons d'abord pourquoi le produit de deux nombres demeure le même, en changeant l'ordre des facteurs, c'est-à-dire, pourquoi $A \times B = B \times A$.

Soit A le plus grand des deux nombres A et B, soit C leur différence, et en conséquence $A = B + C$. On accordera aisément que le produit de A par B, c'est-à-dire A pris B fois, est composé du produit de B par B et du produit de C par B, de sorte qu'en écrivant le multiplicateur le dernier, on a $A \times B = B \times B + C \times B$. Mais le produit de B par A ou par $B+C$, est composé aussi de B pris B fois et de B pris C fois, de sorte qu'on a $B \times A = B \times B + B \times C$. De là on voit que le produit $A \times B$ sera le même que le produit $B \times A$, si le produit partiel $C \times B$ est égal à $B \times C$. Mais par la même raison l'égalité entre CB et BC se prouvera par l'égalité entre deux produits plus petits CD et DC; et en continuant ainsi on parviendra nécessairement, soit au cas où les deux facteurs sont égaux, soit au cas où l'un des deux est égal à l'unité. Dans le premier cas, l'égalité est manifeste; dans le second, elle se conclut de ce que $H \times 1$ est H, ainsi que $1 \times H$. Donc le produit $A \times B$ est toujours égal au produit $B \times A$.

II. On suppose ordinairement qu'en multipliant un nombre donné C par un autre nombre N qui est lui-même le produit de deux facteurs A et B, il revient au même de multiplier C par N tout d'un coup, ou bien de multiplier C par A, ensuite le produit par B.

Pour démontrer cette proposition, j'observe d'abord que le produit AB n'est autre chose que $A + A + A +$ etc., le nombre de ces termes étant B. Lors donc qu'on multiplie un troisième nombre C par le produit AB, on est censé répéter B fois l'opération de multiplier C par A, c'est-à-dire qu'on a $CA + CA + CA +$etc., le terme CA étant écrit B fois. Le résultat est donc $\overline{CA} \times B$, de sorte qu'on a $C \times \overline{AB} = \overline{CA} \times B$.

III. D'après ces deux propositions, on démontrera facilement que *le produit de tant de facteurs qu'on voudra, demeure toujours le même, en quelque ordre que les facteurs soient multipliés.*

Pour prouver, par exemple, que le produit $A \times B \times C \times D$ est égal au produit $C \times A \times D \times B$, je commence par faire ensorte que la même lettre occupe la dernière place dans les deux. Or on a, en vertu des propositions précédentes, $A \times \overline{BC} = A \times \overline{CB} = \overline{AC} \times B$; donc $A \times B \times C \times D = \overline{AC} \times B \times D = \overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AC} \times D \times B$; la lettre B est à la dernière place dans ce produit, comme elle l'est dans l'autre produit donné $CADB$. Otant la dernière lettre, il suffira de prouver l'égalité $\overline{AC} \times D = C \times A \times D$; or celle-ci résulte de ce que $AC = C \times A$.

IV. « Le produit de deux nombres A et B est divisible par tout nombre » qui divise exactement l'un des deux facteurs A et B. »

Car soit θ un nombre qui divise B, et soit en conséquence $B = C \times \theta$, on aura $AB = \overline{AC} \times \theta$; donc AB divisé par θ donne le quotient exact AC.

V. « Si le nombre θ divise à-la-fois les deux nombres A et B, il di-

Cambridge University Press
978-1-108-00173-1 - Essai Sur La Theorie Des Nombres
Adrien-Marie Legendre
Excerpt
More information

» visera la somme et la différence de deux multiples quelconques de ces » nombres. »

Car si l'on a $A=A'\theta$, $B=B'\theta$, il en résulte $mA\pm nB=mA'\theta\pm nB'\theta$, quantité qui, divisée par θ, donne le quotient exact $mA'\pm nB'$.

VI. « Tout nombre premier qui ne divise ni l'un ni l'autre des fac- » teurs A et B, ne peut diviser leur produit AB. »

Cette proposition étant l'une des plus importantes de la théorie des nombres, nous donnerons à sa démonstration tout le développement nécessaire.

Soit, s'il est possible, θ un nombre premier qui ne divise ni A ni B, mais qui divise le produit AB, on pourra supposer qu'en divisant A par θ on a le quotient m (qui pourrait être zéro) et le reste A'; on aura donc $A=m\theta+A'$, et semblablement $B=n\theta+B'$. Donc $AB=mn\theta^2+nA'\theta+mB'\theta+A'B'$. Cette quantité, d'après l'hypothèse, doit être divisible par θ, et comme les trois premiers termes sont divisibles par θ, il faudra que le quatrième $A'B'$ soit également divisible par θ; ainsi nous pourrons faire $A'B'=C'\theta$.

Dans ce premier résultat, nous remarquerons 1°. que A' et B' ne sont zéro ni l'un ni l'autre, parce que A et B sont supposés non divisibles par θ; 2°. que A' et B', comme restes de la division par θ, sont moindres que θ; 3°. qu'aucun des nombres A' et B' ne peut être égal à l'unité; car si on avait $A'=1$, le produit $A'B'$ se réduirait à B'; or B' étant $<\theta$, il est impossible qu'on ait $B'=C'\theta$.

Nous avons donc deux nombres entiers, A', B', tous deux plus grands que l'unité, et tous deux moindres que θ, dont le produit est divisible par θ, de sorte qu'on a $A'B'=C'\theta$. Voyons les conséquences qui en résultent.

Puisque A' est moindre que θ, on peut diviser θ par A'; soit p le quotient et A'' le reste, on aura $\theta=pA'+A''$; donc $\theta\times B'=pA'B'+A''B'$. Le premier membre est divisible par θ, il faut donc que le second le soit aussi. Mais la partie $A'B'$ est divisible d'elle-même par θ, puisque $A'B'=C'\theta$; donc l'autre partie $A''B'$ doit être encore divisible par θ.

Le nombre A'', comme reste de la division par A', est moindre que A', il ne peut d'ailleurs être zéro; car si cela était, θ serait divisible par A' et ne serait plus un nombre premier. Donc du produit $A'B'$, supposé divisible par θ, on tire un autre produit $A''B'$ divisible encore par θ, et qui est plus petit que $A'B'$ sans être zéro.

En suivant le même raisonnement, on déduira du produit $A''B'$ un autre produit $A'''B'$ ou $A''B''$, encore plus petit, et qui sera toujours divisible par θ sans être zéro.

Et en continuant la suite de ces produits décroissans, on parviendra nécessairement à un nombre moindre que θ. Or il est impossible qu'un nombre moindre que θ, et qui n'est pas zéro, soit divisible par θ; donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu.

Donc si les nombres A et B ne sont divisibles, ni l'un ni l'autre, par θ, leur produit AB ne pourra non plus être divisible par θ.

VII. La doctrine des incommensurables repose entièrement sur le principe qu'on vient de démontrer. En effet, s'il existait, par exemple, une fraction rationnelle $\frac{m}{n}$ égale à $\sqrt{2}$, il faudrait que $\frac{m^2}{n^2}$ fût égale à 2. Donc m^2 devrait être divisible par chacun des nombres premiers qui divisent n. Mais la fraction $\frac{m}{n}$ étant censée irréductible, m n'a aucun diviseur commun avec n; donc, en vertu du théorème précédent, m^2 ne peut avoir non plus aucun diviseur commun avec n; donc il est impossible qu'on ait $\frac{m^2}{n^2}=2$.

En général une puissance quelconque du nombre a ne peut avoir pour diviseurs d'autres nombres premiers que ceux qui divisent a; ainsi s'il n'y a point de nombre entier x tel que $x^n=b$, b étant un nombre donné, il n'y a point non plus de fraction $\frac{x}{y}$ telle que $\frac{x^n}{y^n}=b$.

VIII. « Un nombre quelconque N, s'il n'est pas premier, peut être
» représenté par le produit de plusieurs nombres premiers α, β, γ, etc.,
» élevés chacun à une puissance quelconque, de sorte qu'on peut toujours
» supposer $N=\alpha^m\beta^n\gamma^p$, etc. »

La méthode à suivre pour opérer cette décomposition, consiste à essayer la division du nombre N par chacun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, etc. Lorsque la division réussit par l'un de ces nombres α, on la répète autant de fois qu'elle est possible, par exemple, m fois, et en appelant le dernier quotient P, on a $N=\alpha^m P$.

Le nombre P ne pouvant plus être divisé par α, il est inutile d'essayer la division de P par un nombre premier moindre que α; car si P était divisible par θ moindre que α, il est clair que N serait aussi divisible par θ, ce qui est contraire à la supposition. On ne devra donc essayer de diviser P que par des nombres premiers plus grands que α; on trouvera ainsi successivement $P=\beta^n Q$, $Q=\gamma^p R$, etc., ce qui donnera $N=\alpha^m\beta^n\gamma^p$, etc.

IX. « Si, après avoir essayé la division d'un nombre donné N par les » nombres premiers plus petits que $\sqrt{N}$, on n'en trouve aucun qui di- » vise N, on en conclura avec certitude que N est un nombre premier. »

Car supposons que N soit divisible par un nombre premier $\theta>\sqrt{N}$, on aurait donc, en appelant P le quotient, $N=\theta P$. Mais puisque θ est $>\sqrt{N}$, on aura $P=\frac{N}{\theta}<\frac{N}{\sqrt{N}}<\sqrt{N}$; donc N serait divisible par un nombre P moindre que $\sqrt{N}$; donc, à plus forte raison, il serait divisible par un nombre premier $<\sqrt{N}$, ce qui est contre la supposition.

On peut donc trouver, de cette manière, si un nombre donné N est premier, ou s'il ne l'est pas; mais quoique cette méthode soit susceptible de quelques abrégés dont nous ferons mention ci-après, elle est en général longue et fastidieuse. Aussi plusieurs mathématiciens ont-ils jugé convenable de construire des tables de nombres premiers plus ou moins étendues.

La manière la plus simple de construire ces tables, est de commencer par écrire de suite les nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc. jusqu'à 100000, ou telle autre limite qu'on peut se proposer. Cette suite étant formée, on en efface successivement tous les multiples de 3, tous ceux de 5, tous ceux de 7, etc., en conservant seulement les premiers termes 3, 5, 7, etc., non effacés par les opérations antérieures. De cette manière, il est visible que tous les nombres restans n'ont d'autres diviseurs qu'eux-mêmes, et qu'ainsi ils sont des nombres premiers. On trouvera à la fin de cet Ouvrage une Table n° IX, qui contient les nombres premiers jusqu'à 1229. Dans un Livre intitulé, *Georgii Vega Tabulæ logarithmico-trigonometricæ, Lipsiæ* 1797, on en trouve une qui s'étend jusqu'à 400000, et qui a, de plus, l'avantage d'indiquer pour chaque nombre composé le plus petit nombre premier qui en est diviseur.

X. Un nombre N étant réduit à la forme $\alpha^m\beta^n\gamma^p$, etc., tout diviseur de ce nombre sera aussi de la forme $\alpha^\mu\beta^\nu\gamma^\pi$, etc., où les exposans μ, ν, π, etc. ne pourront surpasser m, n, p, etc. Il suit de là que tous les diviseurs du nombre N seront les différens termes du produit développé

$$P=(1+\alpha+\alpha^2\ldots+\alpha^m)\,(1+\beta+\beta^2\ldots+\beta^n)\,(\text{etc.})$$

Donc le nombre de tous ces diviseurs est

$$(m+1)\ (n+1)\ (p+1) \text{ etc.}$$

Et en même temps la somme de ces mêmes diviseurs est égale à P et peut se mettre sous la forme

$$P = \frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1},\quad \frac{6^{n+1}-1}{6-1},\quad \frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma-1},\quad \text{etc.}$$

Par exemple, puisqu'on a $360 = 2^3.3^2.5^1$, le nombre des diviseurs de 360 est $4.3.2 = 24$, et leur somme

$$= \frac{2^4-1}{2-1}.\frac{3^3-1}{3-1}.\frac{5^2-1}{5-1} = 15.13.6 = 1170.$$

XI. Il est facile de trouver un nombre qui ait tant de diviseurs qu'on voudra. Cherchons, par exemple, un nombre qui ait 36 diviseurs; on décomposera 36 en facteurs premiers ou non, tels que 4.3.3; on diminuera chaque facteur d'une unité, ce qui donnera 3.2.2; d'où l'on conclura que $\alpha^3 6^2 \gamma^2$ est l'une des formes du nombre cherché, α, 6, γ étant des nombres premiers inégaux. Les facteurs 6, 3, 2 donneraient une autre forme $\alpha^5 6^2 \gamma^1$, dans laquelle le plus simple des nombres compris est $2^5.3^2.5 = 1440$.

XII. Si on cherche en combien de manières le nombre $N = \alpha^m 6^n \gamma^p$, etc. peut être le produit de deux facteurs A et B, on trouvera que ce nombre $= \frac{1}{2}(m+1)\ (n+1)\ (p+1)$ etc. Car chaque diviseur A est accompagné de son inverse $\frac{N}{A}$ ou B; ainsi le nombre des quantités AB ou BA est la moitié de celui des diviseurs de N.

Si le nombre N était un quarré, tous les exposans m, n, p, etc. seraient pairs, et alors la moitié du produit $(m+1)\ (n+1)\ (p+1)$ etc. contiendrait la fraction $\frac{1}{2}$, pour laquelle il faudrait prendre l'unité.

XIII. Si l'on veut que les deux facteurs dans lesquels on décompose le nombre N soient premiers entre eux, alors le nombre des combinaisons ne dépend plus des exposans m, n, p, etc., et il est le même que si le nombre N était simplement $\alpha 6 \gamma \delta$, etc. de sorte qu'en appelant k le nombre des facteurs premiers inégaux α, 6, γ, etc., on aura 2^{k-1} pour le nombre de manières de partager N en deux facteurs premiers entre eux.

Par exemple, le nombre 1800 peut se partager de 18 manières en deux facteurs; mais il ne peut se partager que de quatre manières en deux facteurs premiers entre eux; car on a $1800 = 2^3.3^2.5^2$, et $2^{3-1} = 4$.

XIV. Un nombre N étant donné, soit proposé de trouver combien il y a de nombres premiers à N et plus petits que N. Pour cela, nous allons examiner successivement l'influence des différens facteurs premiers sur le résultat.

Soit d'abord $N = \alpha M$, α étant un nombre premier et M un facteur quelconque qui pourrait être divisible par α ou par une puissance de α. Si l'on considère la suite des nombres naturels 1, 2, 3...N, les termes de cette suite qui sont divisibles par α forment eux-mêmes la suite α, 2α, $3\alpha \ldots M\alpha$; leur nombre $= M$; donc en appelant x le nombre des termes de la première suite qui ne sont pas divisibles par α, on aura

$$x = M\alpha - M = M(\alpha - 1) = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Soit en second lieu $N = \alpha 6 M$, α et 6 étant deux nombres premiers différens et M un facteur quelconque. Dans la suite 1, 2, 3...N, on peut distinguer trois sortes de termes, 1°. les x termes qui ne sont divisibles ni par α ni par 6; 2°. les termes qui sont divisibles par l'un de ces nombres premiers, sans l'être par l'autre; 3°. les termes divisibles par $\alpha 6$.

Les termes divisibles par α sont au nombre de $\frac{N}{\alpha}$ ou $M6$; mais si on en exclut les termes divisibles par 6, leur nombre se réduira, suivant ce qu'on a déjà trouvé, à $M(6 - 1)$. De même les termes divisibles par 6, sans l'être par α, sont au nombre de $M(\alpha - 1)$. Enfin les termes divisibles par $\alpha 6$ sont au nombre de M. Donc on aura

$$\begin{aligned} \alpha 6 M = x + M(6 - 1) &+ M \\ + M(\alpha - 1)&; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$x = M(\alpha - 1)(6 - 1) = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right).$$

Soit en troisième lieu $N = \alpha 6 \gamma M$; nous distinguerons semblablement dans la suite 1, 2, 3...N, quatre sortes de termes, 1°. les x termes qui ne sont divisibles par aucun des facteurs α, 6, γ; 2°. les termes qui sont divisibles par un de ces facteurs seulement; 3°. ceux qui le sont par deux seulement; 4°. enfin ceux qui le sont par trois.

Les termes divisibles par α sont en général au nombre de $\frac{N}{\alpha}$ ou $M6\gamma$; mais si parmi eux on ne considère que ceux qui sont premiers à 6 et γ, leur nombre se réduit à $M(6 - 1)(\gamma - 1)$, ainsi qu'on l'a trouvé dans le second cas.

Les termes divisibles par $\alpha 6$ sont en général au nombre de $\frac{N}{\alpha 6}$ ou $M\gamma$;

Cambridge University Press
978-1-108-00173-1 - Essai Sur La Theorie Des Nombres
Adrien-Marie Legendre
Excerpt
More information

mais en ne considérant parmi ceux-ci que les termes premiers à γ, leur nombre se réduit à $M(\gamma-1)$.

Enfin les termes divisibles par $\alpha\mathcal{C}\gamma$ sont au nombre de $\frac{N}{\alpha\mathcal{C}\gamma}$ ou M. Donc on aura N ou

$$\begin{aligned}\alpha\mathcal{C}\gamma M = x &+ M(\mathcal{C}-1)(\gamma-1)+M(\gamma-1)+M\\ &+M(\gamma-1)(\alpha-1)+M(\alpha-1)\\ &+M(\alpha-1)(\mathcal{C}-1)+M(\mathcal{C}-1).\end{aligned}$$

Soit, pour un moment, $\alpha-1=\alpha'$, $\mathcal{C}-1=\mathcal{C}'$, $\gamma-1=\gamma'$, le premier membre deviendra $M(\alpha'+1)(\mathcal{C}'+1)(\gamma'+1)$, ou

$$\begin{aligned}M\alpha'\mathcal{C}'\gamma' &+ M\mathcal{C}'\gamma' + M\gamma' + M\\ &+ M\gamma'\alpha' + M\alpha'\\ &+ M\alpha'\mathcal{C}' + M\mathcal{C}'.\end{aligned}$$

Et le second membre ne diffère de cette quantité que par le premier terme, qui est x au lieu de $M\alpha'\mathcal{C}'\gamma'$. Donc on a $x=M\alpha'\mathcal{C}'\gamma'$, ou

$$x=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\mathcal{C}}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Le même raisonnement s'étend aisément à un plus grand nombre de facteurs, et on voit que le résultat sera toujours de la même forme.

XV. Cela posé, tout nombre N pouvant être mis sous la forme $\alpha^m\mathcal{C}^n\gamma^p$, etc., laquelle est comprise dans l'expression générale $M\alpha\mathcal{C}\gamma$, etc., il est clair que par la formule

$$x=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\mathcal{C}}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right), \text{ etc.}$$

on connaîtra combien il y a de nombres premiers à N et plus petits que N.

Par exemple, on a $60=2^2.3.5$, et $60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=16$; donc il y a 16 nombres plus petits que 60 et premiers à 60. Ces nombres sont 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

XVI. Cherchons maintenant combien de fois un nombre premier donné θ est facteur dans la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à N, ou, ce qui revient au même, quelle est la plus grande puissance de θ qui divise le produit $1.2.3\ldots N$.

Pour cela, désignons par $E\left(\frac{n}{a}\right)$ l'entier le plus grand contenu dans la fraction $\frac{n}{a}$, et le nombre cherché ou l'exposant de θ étant nommé x, nous aurons

$$x = E\left(\frac{N}{\theta}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^2}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^3}\right) + \text{etc.},$$

cette suite étant prolongée tant que le numérateur est plus grand que le dénominateur.

En effet, il est évident que $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$ représente le nombre des termes de la suite 1, 2, 3....N, qui sont divisibles par θ; pareillement, $E\left(\frac{N}{\theta^2}\right)$ représente le nombre des termes de la même suite qui sont divisibles par θ^2, ainsi des autres. Or si dans le produit 1.2.3...N, il n'y avait point de termes divisibles par θ^2, le nombre des facteurs θ qui divisent ce produit serait simplement $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$; s'il y a ensuite des termes divisibles par θ^2, chacun de ces termes ajoute un nouveau facteur θ à celui qui était déjà compris dans $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$; de sorte qu'à raison des termes divisibles par θ, et des termes divisibles par θ^2, le nombre des facteurs θ devient $E\left(\frac{N}{\theta}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^2}\right)$. Pareillement, chaque terme divisible par θ^3 ajoute un facteur θ de plus à ceux qui étaient déjà dénombrés; de sorte que le nombre total des facteurs θ devient $E\left(\frac{N}{\theta}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^2}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^3}\right)$; ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une puissance $\theta^i > N$; alors la série des E est terminée, puisque $\frac{N}{\theta^i}$ étant plus petit que l'unité, l'entier compris $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right) = 0$.

XVII. Cherchons, par exemple, combien, dans le produit des nombres naturels de 1 à 10000, il y a de fois le facteur 7. Nous ferons l'opération suivante, qui se termine bientôt,

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{10000}{7}\right) &= 1428 \\
E\left(\frac{10000}{7^2}\right) &= E\left(\frac{1428}{7}\right) = 204 \\
E\left(\frac{10000}{7^3}\right) &= E\left(\frac{204}{7}\right) = 29 \\
E\left(\frac{10000}{7^4}\right) &= E\left(\frac{29}{7}\right) = 4 \\
E\left(\frac{10000}{7^5}\right) &= E\left(\frac{4}{7}\right) = 0.
\end{aligned}$$

La somme de tous ces nombres $= 1665$; donc le produit dont il s'agit est divisible par 7^{1665}.

Si le nombre proposé N eût été une puissance entière de 7, on aurait eu exactement $x = N\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}\right) = \frac{N-1}{6}$. En général, si on a $N = \theta^m$, le nombre des facteurs θ compris dans le produit $1.2.3\ldots N$ sera

$$x = \frac{N-1}{\theta - 1}.$$

Et si on fait, comme on peut toujours le supposer,

$$N = A\theta^m + B\theta^n + C\theta^p + \text{etc.},$$

les coefficiens A, B, C, etc. étant plus petits que θ, il en résultera

$$x = \frac{N - A - B - C - \text{etc.}}{\theta - 1}.$$

XVIII. Dans le cas particulier où $\theta = 2$, si l'on a $N = 2^m$, il en résultera $x = N - 1$, et si l'on fait généralement

$$N = 2^m + 2^n + 2^p + \text{etc.},$$

on aura

$$x = N - k,$$

k étant le nombre des termes 2^m, 2^n, 2^p, etc. dont se compose la valeur de N.

Veut-on, par exemple, savoir combien de fois 2 est facteur dans la suite des nombres naturels de 1 à 1000? on décomposera 1000 en puissances de 2, savoir $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$; et comme le nombre de ces termes est 6, le nombre cherché sera $1000 - 6$ ou 994.

Le même résultat s'obtient non moins facilement par la formule générale, car on a $E\left(\frac{1000}{2}\right) = 500$, $E\left(\frac{500}{2}\right) = 250$, $E\left(\frac{250}{2}\right) = 125$, $E\left(\frac{125}{2}\right) = 62$, $E\left(\frac{62}{2}\right) = 31$, $E\left(\frac{31}{2}\right) = 15$, $E\left(\frac{15}{2}\right) = 7$, $E\left(\frac{7}{2}\right) = 3$, $E\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, et la somme de tous ces nombres $= 994$.

XIX. « Tout nombre premier, excepté 2 et 3, est compris dans la » formule $6x \pm 1$. »

En effet, si l'on divise un nombre impair par 6, le reste ne peut être que l'un des nombres 1, 3, 5. Donc tout nombre impair peut être représenté par l'une des formules $6x + 1$, $6x + 3$, $6x + 5$. La seconde