# PROBLÈMES DE MONGE-AMPÈRE, COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES.

*En l'honneur de Franco Tricerri.*

## INTRODUCTION

Ce qui suit est une version résumée de l'article [L4]. Dans l'article [L2], nous avons décrit une série d'exemples de problèmes elliptiques sur des surfaces se traduisant en termes de courbes holomorphes. Plus précisemment, pour ces exemples, nous avons montré qu'il existe une structure presque complexe sur un espace de jet, ou plus généralement sur une sous-distribution de l'espace tangent à cet espace de jets, telle que les jets de solutions du problème soient des courbes holomorphes. Cette interprétation pseudo-holomorphe étant le reflet géométrique d'une utilisation du théorème d'uniformisation de Riemann.

Le théorème de compacité à bulles près de Gromov pour les courbes holomorphes d'energie bornée [G1] , donne des théorèmes de compacité pour ces problèmes; le lien avec les résultats de compacité dans le cas des surfaces minimales est bien connu.

Une sous-classe de ces problèmes — où apparaissent en général des équations de Monge-Ampère — présente une forme de perte de compacité le long des courbes (réelles) [L1] [Sr] bien différente de la situation décrite par le théorème de Gromov. De plus, ce phénomène se produit sans que l'on ait à borner l'aire de nos courbes holomorphes. Des bornes plus restrictives —sur l'aire en particulier— aboutissent en général à une véritable convergence. Il s'agit à première vue d'un phénomène différent du théorème de compacité de Gromov montrant qu'à aire bornée, une suite de courbes holomorphes converge à apparition de bulles près ; la description de la limite d'une suite quelconque de courbes holomorphes paraissant hors de portée. Ces résultats ont pourtant en commun l'outil de base qu'est le lemme de Schwarz de Gromov.

Voici un exemple de ce dont nous venons de parler. Soit $\nabla$ une connexion sans torsion sur une surface, $B$ une fonction positive sur $J^1\Sigma = T^*\Sigma \times \mathbb{R}$ et $A$ une section du fibré $S^2\Sigma \times \mathbb{R} \to \Sigma \times \mathbb{R}$, où $S^2_s\Sigma$ est constitué des endomorphismes symétriques de $T_s\Sigma$. L'*équation de Monge-Ampère elliptique* portant sur $f$ est l'équation

$$(*) \qquad \det(\nabla df + A(s, f(s))) = B(s, f(s), df(s)) \quad .$$

Le déterminant étant mesuré grâce à une forme de volume de référence.

Si $\{f_n\}$ est une suite de solutions de $(*)$, on dira qu'un point $x$ de $\Sigma$ est *semi-singulier* si

(i) aucune sous-suite de $\{f_n\}$ ne converge $C^\infty$ au voisinage de $x$,

(ii) il existe une suite $\{x_n\}$ tendant vers $x$ telle que $j^1 f_n(x_n)$ reste borné.
Notre résultat précise la structure des points semi-singuliers :

THÉORÈME A. *Après extraction d'une sous-suite de $\{f_n\}$ l'ensemble des points semi-singuliers est une réunion de géodésiques pour $\nabla$, disjointes et complètes relativement au bord de $\Sigma$.*

Nous obtenons également comme sous-produit de nos techniques le résultat suivant déjà connu.

THÉORÈME B. *Toute suite de solutions $C^1$ bornée de l'équation de Monge-Ampère possède une sous-suite convergeant $C^\infty$ sur tout compact.*

Ce résultat, que l'on peut aussi considérer comme une estimée *a priori*, est également un corollaire du théorème 9.4.1 de [Sz]. Notre approche géométrique et *via* un résultat général de compacité est sensiblement différente de celle de [Sz]. Néanmoins, il est clair que l'interprétation pseudo-holomorphe est une version géométrique de la théorie caractéristique de Heinz-Lewy développée dans cet ouvrage. Ceci n'est d'ailleurs pas une surprise, cette théorie étant par l'intermédiaire de Vekua et Pogorelov l'une des sources de la théorie pseudo-holomorphe à la Gromov.

L'un des buts de l'article [L4] est de comprendre pourquoi ces problèmes (équations de Monge-Ampère, immersions isométriques elliptiques...) possèdent ce type de dégénérescence. La réponse va être donnée par l'existence d'une structure géométrique (que nous appellerons de Monge-Ampère) comprenant en particulier une structure presque complexe sur un espace de jets. L'existence de la géodésique singulière s'interprétant comme une solution dégénérée, c'est-à-dire une courbe holomorphe dans notre espace de jets qui, contrairement aux vraies solutions qui sont des graphes, se projette sur notre géodésique.

Après avoir défini cette géométrie, qui rend compte de nombreux exemples, nous énoncerons un théorème général de compacité qui a parmi ses corollaires les résultats cités. Un des aspects intéressants, sur lequel nous ne reviendrons pas dans cette note, est la possibilité de construire un "espace de solutions pointées" ayant une structure de lamination et dont nous aimerions connaître le comportement dynamique. Après ces définitions, nous allons étudier un cas particulier — correspondant au cas intégrable de la géométrie — de ce théorème de compacité. Cette étude est la partie originale de cette note par rapport à [L4].

S. Semmes et J. Jost ont tous les deux attiré mon attention sur l'analogie entre le théorème A et les résultats globaux de A. Nadel sur l'équation de Monge-Ampère complexes [N]. Il serait intéressant de savoir si cette analogie est purement formelle, bien que les résultats ne semblent être que cousins.

Je remercie S. Hildebrant de m'avoir signalé le livre de F. Schulz lors de cette conférence à Cortona. Enfin cet article doit beaucoup au travail [Sr] de Schlenker ainsi qu'à de nombreuses conversations avec lui.

## 1 Définitions, résultat principal

Nous allons donner dans cette section la définition de la géométrie des variétés de *Monge-Ampère.* contenant des surfaces particulières dites *solutions de Monge-Ampère.* Le cas le plus "intégrable" de cette géométrie est $\mathbb{C}^2$ muni d'un feuilletage par des plans totalement réels parallèles, les solutions de Monge-Ampère étant alors les courbes holomorphes transverses à ce feuilletage.

Dans le cas général une structure de Monge-Ampère sur une variété $M$, est un triplet $(W, J, V)$ où $W$ une distribution de dimension 4 de $TM$, $J$ une structure complexe sur $W$, $V$ une sous-distribution de $W$ de dimension 2, telle que $W = V \oplus JV$, et qui vérifie la condition d'intégrabilité suivante:

(i) au voisinage de chaque point de $M$ nous pouvons trouver une distribution intégrable $L$ telle que $L \cap W = V$.

Une surface $\Sigma$ de $M$ est une *courbe holomorphe* si $T\Sigma$ est incluse dans $W$ et stable par $J$. On demande enfin au quadruplet $(M, W, J, V)$ de vérifier la condition suivante:

(ii) pour tout vecteur tangent $u$ à $V$, il existe un germe de courbe holomorphe $\Sigma, u$ étant tangent à $\Sigma$, telle que $\dim(T\Sigma \cap V)$ vaille constamment 1. De telles surfaces, qui vont jouer un rôle important par la suite, sont appelées *surfaces rideaux.*

Une solution de *Monge-Ampère* est alors une courbe holomorphe dont l'espace tangent est en tout point transverse à $V$.

Plus précisemment, nous demanderons qu'une telle courbe soit l'image d'une surface par une immersion et que, $M$ étant supposée munie d'une métrique riemannienne complète, la métrique induite sur la surface soit complète.

Nous verrons par la suite de nombreux exemples de cette géométrie. Revenons un instant cependant au cas le "plus intégrable", évoqué au début de ce paragraphe, pour remarquer que les surfaces rideaux sont les droites complexes passant par un vecteur $u$ donné.

Nous allons maintenant décrire une topologie sur l'espace constitué des paires $(x, \Sigma)$ où $x$ est un point d'une solution de Monge-Ampère $\Sigma$. Remarquons tout d'abord que du fait du prolongement analytique, il existe un couple $(f_1, \Sigma_1)$ où $f_1$ est une immersion de la surface $\Sigma_1$ dans $M$, $f_1(\Sigma_1) = \Sigma$, telle que si $(f_2, \Sigma_2)$ vérifie $f_2(\Sigma_2) = \Sigma$ il existe un revêtement $\pi$ de $\Sigma_2$ sur $\Sigma_1$ tel que $f_2 = f_1 \circ \pi$. Un tel couple est bien sûr unique à difféomorphisme près. Par définition, les *points* de $\Sigma$ sont les points de $\Sigma_1$, la paire $(f_1, \Sigma_1)$ est le *représentant* de $\Sigma$.

La topologie que nous allons considérer sur l'espace des paires $(x, \Sigma)$ est donnée par une base d'ouvert $\sigma(\Sigma, U, \varepsilon, k)$ où $U$ est un voisinage de $x$ homémorphe au disque dans $\Sigma_1, (f_1, \Sigma_1)$ représentant $\Sigma$ solution de Monge-Ampère, $\varepsilon$ un réel strictement positif et $k$ un entier.

On pose $\sigma(\Sigma, U, \varepsilon, k) = \{(\overline{x}, \overline{\Sigma})$ tel qu'il existe un voisinage $\overline{U}$ de $\overline{x}$ dans $\overline{\Sigma}_1$ tel que $\overline{f_1}(\overline{U})$ est $\varepsilon$ proche dans la topologie $C^k$ proche de $f_1(U)$ —où $(\overline{f_1}, \overline{\Sigma})$ est le représentant de $\Sigma$. Dans cette topologie $(x_n, \Sigma_n)$ peut converger vers $(x_0, \Sigma_0)$ sans que les $\Sigma_n$ soient diffeomorphes à $\Sigma_0$. A cause du prolongement analytique, cette topologie est séparée. Notre résultat central est le suivant:

**1.1 Théorème.** *Soit $M$ une variété de Monge-Ampère $(\Sigma_n)$ une suite de solutions, $(x_n)$ une suite de points de $\Sigma_n$ tel que $(x_n)$ converge dans $M$ alors la* *suite $(x_n, \Sigma_n)$ converge après extraction d'une sous-suite vers $(x_0, \Sigma_0)$ tel que $\Sigma_0$ est soit une solution de Monge-Ampère, soit une surface rideau.*

Bien sûr ce théorème se traduit par la compacite d'un certain espace, que nous construirons dans [L4], et qui admet une structure d'espace laminé par des surfaces de riemann dans l'esprit de [Su] et [G2].

## 2 LE CAS INTÉGRABLE

Comme nous l'avons remarqué le cas intégrable de cette géométrie est $\mathbb{C}^2$ muni du feuilletage par les plans totalement réels parallèles à un plan donné. En fait comme le montre le paragraphe suivant, cette situation correspond à l'équation de Monge-Ampère

$$(*) \qquad \det(Ddf) = 1$$

où $D$ est la connexion plate de $\mathbb{R}^2$.

En effet, identifions $T^*\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$, le premier $\mathbb{R}^2$ étant la fibre de la projection sur $\mathbb{R}^2$, le facteur deuxième provenant de l'horizontal de la connexion $D$. Si $f$ est une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ voyons maintenant $df$ comme une section de $T^*U$, l'espace tangent à $df(U)$ est

$$T(df(U)) = \{(\nabla_u df, u), u \in \mathbb{R}^2\}$$

En revenant aux notations de la définition, prenons $W = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ et $V$ la fibre de la projection sur le deuxième facteur. Nous obtenons bien une géométrie de Monge-Ampère en prenant la structure complexe donnée par $J : (u, v) \longmapsto (iv, iu)$, et en vérifiant que $df(U)$ est une courbe holomorphe si et seulement si $\det(Ddf) = 1$. Les courbes rideaux sont alors les droites complexes d'intersection non triviale avec le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Enfin $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ avec la structure complexe que nous venons de définir s'identifie avec $\mathbb{C}^2$

Il est intéressant à ce stade de remarquer que les droites complexes tangentes à $df(U)$ sont des droites complexes *positives* en ce sens que le déterminant de la projection d'une telle droite sur $\mathbb{C}^2/V$ est positif.

Après ce préliminaire, étudions donc les solutions $f$ de l'équation de Monge-Ampère $(*)$ qui sont des graphes au dessus d'un ouvert $U$ de $\mathbb{C}^2/V$, en utilisant librement les identifications faites dans le paragraphes précédent . Un lemme crucial est alors le suivant:

**2.1** LEMME. *Tout point $x$ de $T^*U$ possède un voisinage ouvert $O$ contenant un voisinage compact $K$ telle que si $\Sigma = df(U)$ intersecte $K$ alors toute composante connexe $\Sigma_0$ de $\Sigma \cap O$ intersectant $K$ vérifie*

*(i) $\Sigma_0$ est homéomorphe au disque*

*(iii) Aire $(\Sigma_0) \leq C_0$.*

Un tel voisinage $O$ sera appelé un *bon voisinage*, et la composante connexe $\Sigma_0$ de $\Sigma \cap O$ intersectant $K$ *bon disque.* Pour démontrer ce lemme nous avons besoin de la proposition préliminaire triviale suivante, où nous avons noté $p$ la projection de $T^*(U)$ sur $U$, $i$ la structure complexe de $\mathbb{R}^2$ et $J$ celle de $\mathbb{C}^2$.

**2.2** PROPOSITION. *Si $\Sigma = df(U)$, l'application $\psi$ définie de $T^*(U)$ dans $\mathbb{C}^2/V$ par*

$$\psi(y) = p(y) - ip(Jy)$$

*est 2-lipschitzienne et vérifie*

$$(**) \qquad \forall u \in T\Sigma \quad ; \quad \|T\psi(u)\| \geq \tfrac{1}{2}\|u\| \,.$$

*Preuve:* : il faut utiliser le fait que la toute droite tangente à $\Sigma$ est positive, dans le sens que nous avons défini plus haut. ■

Pour démontrer le lemme, choisissons $\varepsilon$, et un voisinage compact $K$ de $x$ tels que la distance de $K$ au bord de $T^*U$ soit strictement supérieur à $10\varepsilon$. Soit alors $O = T^*U \cap \psi^{-1}(B(\psi(x), \varepsilon'))$ et choisissons $K$ de manière à ce que $K \subset O$. Soit maintenant $\Sigma = df(U)$ une solution de Monge-Ampère et $\Sigma_0$ une composante connexe de $\Sigma \cap U$ intersectant $K$.

L'inégalité $(**)$ entraîne que $\psi$ est un homéomorphisme de $\Sigma_0$ sur $B(\psi(x), \varepsilon)$, et qu'il existe $\mu_2$ ne dépendant que de $\varepsilon$ tel que

$$\text{Aire } (\Sigma_0) \leq \mu_2 \,.$$

Nous avons ainsi construit un bon voisinage autour de chaque point.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer dans ce cas particulier le théorème 1.1

On se donne donc un bon voisinage $O$ de $x_0$, $x_n$ une suite de points convergeant vers $x_0$, $\Sigma_n$ une suite de bons disques holomorphes passant par $x_n$. Nous noterons alors $f_n$, la représentation conforme de $\Sigma_n$ envoyant le centre du disque de Poincaré $D$ sur $x_n$. Pour conclure, il nous faut montrer

**2.3** PROPOSITION. *Modulo une sous-suite, $f_n$ converge $C^\infty$ sur tout compact vers une immersion $f_0$ telle que $f_0(D) \cap U$ est fermée dans $U$ , de plus nous avons l'alternative suivante*

*(i) soit $f_0(D)$ est le graphe d'une solution de Monge-Ampère,*
*(ii) soit $f_0(D)$ est une droite complexe.*

*Preuve:* nous allons montrer ceci en plusieurs étapes, en suivant la stratégie de [L1], [Sr]. Tout d'abord d'après le lemme de Schwarz $f_n$ converge —modulo une sous-suite— vers une application pseudo-holomorphe $f_0$. D'après le lemme A4.1 de [L2], en utilisant maintenant que l'aire des disques est bornée, $f_0(\partial D) \subset \partial O$ et en particulier $f_0$ n'est pas constante.

Raisonnons maintenant sur l'application $g_n$ de $D$ dans $\mathbb{CP}^1$ qui à un point $z$ du disque associe la droite complexe tangente en $f_n(z)$ à $f_n(D)$. Cette application est en fait à valeur dans le disque des droites positives — que nous appelerons $D_1$ — de $\mathbb{CP}^1$ bordé par le cercle des droites complexes rideaux intersectant non trivialement le plan totalement réel $V$. En appliquant à nouveau le lemme de Schwarz à $g_n$, on extrait une sous-suite telle que $g_n$ converge vers $g_0$. Il est alors classique, voir par exemple le lemme A3.1 de [L2], de montrer que $f_0$ est une immersion. Pour conclure, il nous faut montrer l'alternative décrite dans la proposition. Dans ce cas bien sympathique, elle provient du fait que si $g_0(z)$ appartient au bord de $D_1$

pour un $z \in D$ alors nécessairement $g_0$ est constante puisque elle est holomorphe à valeurs dans $D_1$. Dans le cas général, cette propriété est beaucoup plus douloureuse à démontrer, c'est elle qui requiert l'existence de germe de surfaces rideaux passant par tout vecteur tangent à $V$. Enfin dire que $g_0$ est constante et appartient au bord de $D_1$, c'est exactement dire que $f_0(D)$ est une droite complexe intersectant non trivialement le plan totalement réel $V$. Ceci termine la démonstration de cette proposition et donc du cas "intégrable" de notre théorème de compacité. ∎

## 3 Références

[L1] F. Labourie, *Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes*, J. Diff. Geom. **30**, 395-44 (1989).

[L2] F. Labourie, *Exemples de courbes pseudo-holomorphes en géométrie riemannienne*, in *Pseudo-holomorphic curves in symplectic geometry* (M. Audin ed.) Progress in Maths (Birkhaüser) 1994

[L3] F. Labourie, *Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques*, Bull. Soc. Math. Fr. **119**, 307-325 (1991)

[L4] F. Labourie, *Problèmes de Monge-Ampère, courbes pseudo-holomorphes et laminations*, prépublication

[G1] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifold*, Invent. Math. **82**, 307-347 (1985)

[G2] M. Gromov, *Foliated Plateau Problem*, G.A.F.A. **1**, 14-79 (1991)

[N] S. Nadel, *Multiplier Ideal Sheaves and Kähler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature*, Ann. of Maths **132** 549-596 (1990),

[Sr] J.-M. Schlenker, *Surfaces convexes dans des espaces Lorentziens à courbure constante*, prépublication de l'École Polytechnique

[Sz] F. Schulz, *Regularity Theory for Quasilinear Elliptic Systems and Monge-Ampère Equations in Two Dimensions* , LNM 1445 ; (Springer) 1990

[Su] D. Sullivan, *Linking the Universalities of Milnor, Feigenbaum and Ahlfors-Bers*, 543-564 in *Topological Methods in Modern Mathematics* (Stony-Brook 1991) , Publish or Perish 1993

François Labourie
Equipe de Topologie et Dynamique
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay

# Multiplier ideal sheaves and Futaki's invariant

Alan M. Nadel*

## Contents



## 1 Introduction

Recall that a *Fano* manifold is a compact connected complex manifold with ample anticanonical line bundle. An important and still open problem is to find necessary and sufficient conditions for a given Fano manifold to admit a Kähler-Einstein metric. For some existence results see [KS, Nad, Si2, Ti] and for some nonexistence results see [DT, Ko, Fu, Li, Lü, Mat].

Global holomorphic vector fields seem to play a fundamental role in the nonexistence of Kähler-Einstein metrics. The obstructions to existence due to Futaki and Lichnerowicz/Matsushima involve global holomorphic vector fields [Fu, Li, Mat]. Calabi has conjectured that Fano manifolds that have no global holomorphic vector fields necessarily admit Kähler-Einstein metrics [Ca]. This would imply that all obstructions come from vector fields. On

*Research partially supported by the NSF and the Sloan Foundation.

the other hand, in the different but partially analogous context of Yamabi-type equations, vector fields play an important role in *existence* (as opposed to nonexistence), in the form of Pohozaev's identity [Po], which leads to estimates.

In this paper we show how global holomorphic vector fields play a role in existence of Kähler-Einstein metrics. Using Futaki's invariant, we show that the accumulation or bubbling-off sets for approximate Kähler-Einstein metrics in the continuity method cannot lie in the zero sets of certain global holomorphic vector fields. As an application, we present a new approach to the uniformization of $\mathbf{P}^1$.

# 2 Preliminaries

## 2.1 Multiplier ideal sheaves for the continuity method

In this section we briefly review multiplier ideal sheaves and the continuity method for obtaining the existence of Kähler-Einstein metrics on certain Fano manifolds. See [Nad, Au, Si1, Ti] for more details and references.

Let $M$ be a Fano manifold. Let $g$ be a fixed background Kähler metric on $M$ whose Kähler form represents $C_1(M)$. Let $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ be the Einstein discrepancy potential for $g$, defined uniquely up to an additive constant by $\partial\overline{\partial} f = \text{Ricci}(g) - g$. One tries to get a Kähler-Einstein metric on $M$ by using the continuity method to solve the Monge-Ampère equation

$$\frac{\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \varphi)}{\det(g_{\alpha\bar{\beta}})} = e^{-t\varphi + f}$$

starting at $t = 0$ and woking towards $t = 1$. The unkown here is $\varphi \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. By taking $\partial\overline{\partial}\log$ of the above equation one gets the equivalent equation

$$\text{Ricci}(\tilde{g}_t) = t\tilde{g}_t + (1-t)g.$$

The unkown , or evolved, Kähler metric is $\tilde{g}_t := g + \partial\overline{\partial}\varphi_t$, which is Kähler-Einstein iff $t = 1$. Openness for the continuity method always holds for $t < 1$, and closedness holds once we have a zeroth order *a priori* estimate. Thus the only missing step needed to get existence for $t = 1$ and hence a Kähler-Einstein metric is the zeroth order *a priori* estimate. Such estimates hold for some $M$ and not for others and therefore must depend in some way on the geometry of $M$.

**Theorem 2.1** *Let $M$ be a Fano manifold and $g$ a Kähler metric on $M$ whose Kähler form represents $C_1(M)$. Suppose that closedness does not hold for the continuity method described above. Then there exists a coherent sheaf* *of ideals $\mathcal{I}$ on $M$ satisfying various properties including (I1) $0 \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathcal{O}_M$ and (I2) $H^q(M, \mathcal{I}) = 0$ for $q > 0$.*

Let $V \subset M$ be the subvariety cut out by the sheaf $\mathcal{I}$. By (I1) we have $\emptyset \subsetneq V \subsetneq M$ and by (I2) we know that $V$ is connected. The sheaf $\mathcal{I}$ is called the multiplier ideal sheaf and the subvariety $V$ is called the multiplier ideal subvariety.

## 2.2 Futaki's invariant

As before let $M$ be a Fano manifold, and let $H^0(M, T_M)$ be the Lie algebra of global holomorphic vector fields on $M$ under the operation of Lie brackets. These are vector fields $X$ on $M$ which are locally of the form

$$X^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

where the $X^\alpha$ are local holomorphic functions. By the way, the real and imaginary parts of $X$ generate, by flowing, one-parameter groups of biholomorphisms. Let $g$ be any Kähler metric on $M$ whose Kähler form represents $C_1(M)$ and let $f$ be the Einstein discrepancy potential of $g$. Futaki's invariant is the map

$$\mathbf{F} : H^0(M, T_M) \to \mathbf{C}$$
$$\mathbf{F}(X) = \int_M df(X) \operatorname{vol}_g.$$

Futaki showed that this map is a Lie algebra character and is independent of the choice of metric $g$. Thus if $M$ admits a Kähler-Einstein metric then the invariant must be zero. Moreover, for some particular Fano manifolds it is not zero. Hence it is a nontrivial obstruction. (See [Fu, KW].)

We shall be interested in vector fields $X$ for which $\mathbf{F}(X) = 0$. Our approach will be to compute $\mathbf{F}(X)$ with respect to the evolved metric $\tilde{g}$ and to thereby get estimates for $\tilde{g}$. For this approach to be useful, one needs to have access to vector fields with $\mathbf{F}(X)$. One way to get such vector fields is to consider Fano manifolds with $H^0(M, T_M)$ semisimple. Complex projective space is such a Fano manifold. Alternatively there are many toric Fano manifolds with vanishing Futaki invariant, even though $H^0(M, T_M)$ is not semisimple. One can ask whether, for toric Fano manifolds, vanishing of Futaki's invariant is enough to guarantee existence of Kähler-Einstein metrics [Mab, Nak].

# 3 Main result

**Theorem 3.1 (Main Theorem)** *Let $M$ be a Fano manifold and $g$ an anitial Kähler metric on $M$ whose Kähler form represents $C_1(M)$. Suppose that* *closedness does not hold for the continuity method, so that we get a multiplier ideal subvariety $V \subset M$. Then for any global holomorphic vector field $X$ on $M$ with vanishing Futaki invariant we have $V \not\subset Z^+(X)$.*

Let us explain the notation. For any holomorphic vector field $X$ on any complex manifold $M$, we let $Z(X) \subset M$ denote the zero set of $X$. We then define $Z^+(X) \subset Z(X)$ to be the set of all points in $M$ at which $X$ both vanishes and has divergence with positive real part. Recall that the divergence of a vector field is defined with respect to some background volume form vol and is given by $\operatorname{div}(X) = (\mathcal{L}_X \operatorname{vol})/\operatorname{vol}$ where $\mathcal{L}_X$ denotes Lie derivative. In general $\operatorname{div}(X)$ will depend on our choice of volume form. At points where $X$ vanishes, however, $\operatorname{div}(X)$ will be well-defined and not depend on our choice of volume form. This is very easy to check. Therefore, $Z^+(X)$ will be a well-defined set. The next two sections will be devoted to the proof of the theorem.

## 4 Estimate for the volume form away from the multiplier ideal subvariety

Suppose now we are using the continuity method to try to get a Kähler-Einstein metric on a particular Fano variety $M$ and it is not working, so that we get a multiplier ideal subvariety $V \subset M$. We also get an increasing sequence of number $\{t_i\} \subset (0,1)$ such that $\sup_M \varphi_i \to \infty$ and such that the following holds. Let a compact set $K \subset M - V$ be given. Then there exists a constant $\gamma > \frac{m}{m+1}$ for which

$$(\sup_M e^{\gamma\varphi_i}) \int_K e^{-\gamma\varphi_i} \leq O(1) \tag{1}$$

(as $i \to \infty$). See [Nad] for details. Here for simplicity of notation we have written $\varphi_i$ rather than $\varphi_{t_i}$ and we have taken the above integral with respect to any fixed background volume form. Our goal in this section is to show the following.

**Proposition 4.1** *In the above situation, $\int_K vol_{\tilde{g}_i} \to 0$ as $i \to \infty$.*

*Proof.* From the Monge-Ampère equation it follows that the evolved volume form $\operatorname{vol}_{\tilde{g}_i}$ equals

$$e^{-t_i\varphi_i}$$

times a fixed background volume form. It is therefore sufficient to show that

$$\int_K e^{-t_i\varphi_i} \to 0$$