NOEUDS RIGIDEMENT INVERSIBLES

C. Michel Boileau

Abstract. A knot is called *invertible* if there is an orientation preserving homeomorphism of space which reverses the orientation of the knot. It is called *rigidly invertible* if the homeomorphism is an involution.

There are knots known to be invertible but not rigidly so (the Montesinos conjecture). In this paper, the author shows that they all have companions of a specific type. In particular, the invertible fibred knots are rigidly invertible.

Un noeud K est une sous-variété lisse, connexe, close de dimension 1, plongée dans la sphère orientée S^3.

Un noeud K est dit inversible s'il existe un homéomorphisme du couple (S^3, K) qui est de degré $+1$ dans S^3 et de degré -1 sur K (arbitrairement orienté). Le noeud K est dit *"rigidement inversible"* s'il est inversible et s'il peut être inversé par une involution de S^3 ; cette involution admet alors un cercle de points fixes non noué qui rencontre K en deux points (cf. Montesinos, J.M., 1975).

J.M. Montesinos a conjecturé (cf. Montesinos, J.M., 1975, et Kirby, R., 1978, pb.1-6) que: "tout noeud inversible est rigidement inversible".

Des contre-exemples à cette conjecture ont été exhibés indépendamment par R. Hartley (1980) et W. Whitten (1981)(1980). Ces contre-exemples K ont tous la propriété suivante : ils admettent tous un compagnon non inversible K_0, pour lequel K a un *"nombre de tours"* (ou "winding number") nul. C'est-à-dire qu'il existe dans $S^3 - K$ un tore plongé T_0 incompressible, non périphérique, tel que le nombre d'enlacement d'un méridien de T_0 avec K est nul; l'âme K_0 du tore plein bordé par T_0 dans S^3 est appelé compagnon de K et la valeur absolue du nombre d'enlacement du méridien de T_0 avec K est par définition le nombre de tours de K par rapport à son compagnon K_0. Un contre-exemple typique à la conjecture de Montesinos est n'importe quel double au sens de Whitehead d'un noeud non inversible (voir (Whitten, W., 1981), Hartley, R., 1980)).

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant:

Théorème.

Soit K un noeud inversible, n'ayant aucun compagnon pour lequel K a un nombre de tours nul. Alors, le noeud K est rigidement inversible.

En particulier, si on considère la classe des noeuds fibrés K dans S (c'est-à-dire les noeuds dont le complément $S - K$ est fibré sur le cercle S avec pour fibre une surface de Seifert du noeud K; voir par exemple (Kervaire, M. et Weber, C., 1977), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire.

Un noeud fibré K dans S est inversible si et seulement s'il est rigidement inversible.

Au § 4, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un noeud soit rigidement inversible, en utilisant la notion d'arbre caractéristique de compagnonnage (cf.(Bonahon, F., et Siebenmann, L.); voir § 1). Si la caractérisation, donnée au § 4, ne permet pas de décrire explicitement les noeuds rigidement inversibles, elle généralise les résultats obtenus dans cette direction par R. R. Hartley (1980) et W. Whitten (1981),(1980). En particulier elle permet de donner des exemples de noeuds inversibles qui ne sont pas rigidement inversibles, mais dont tous les compagnons au sens de Schubert sont isotopes à un même noeud rigidement inversible, contrairement aux exemples donnés par Hartley et Whitten.

Je tiens à remercier Daniel Lines et Claude Weber pour de nombreuses et utiles conversations durant la rédaction de ce travail.

1. *Préliminaires.*

Dans tout ce qui suit on suppose qu'on est dans la catégorie P L. ou C^∞.

Pour un noeud K dans S^3, on note $N(K)$ un voisinage tubulaire de K et $X = S^3 - \mathring{N}(K)$ l'extérieur de K.

La démonstration du théorème utilise l'existence, donnée par Johannson (Johannson, K., 1979) et Jaco-Shalen (Jaco, W. et Shalen, P., 1979), d'une famille finie $\mathcal{T}$ de tores disjoints, incompressibles, non parallèles entre eux, plongés dans X (l'un des tores correspond au bord ∂X), et vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Les composantes connexes fermées de $X - \mathcal{T}$ sont soit des fibrés de Seifert (c'est-à-dire admettent une action différentiable du cercle S^1), soit des variétés atoroïdales et anannulaires (c'est-à-dire ne contiennent aucun tore incompressible, plongé, non périphérique, ni aucun anneau incompressible, ∂-incompressible, proprement plongé et non parralèle au bord); ces dernières variétés portent sur leur intérieur une structure hyperbolique complète à volume fini, d'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston (Thurston, W.P., (1982), (1980)).

(2) La famille $\mathcal{T}$ est minimale, et donc unique à isotopie près.

On considère le graphe dont les sommets sont les composantes connexes fermées de $X - \mathcal{T}$ et les arêtes correspondent aux tores de la famille $\mathcal{T}$ (au tore ∂X correspond une arête de valence libre dans le graphe; voir (Bonahon, F., et Siebenmann, L., Chapter 3). Ce graphe est en fait un arbre car $H_1(X) \cong Z$ est engendré par un méridien de $\partial X = \partial N(K)$. Comme la famille $\mathcal{T}$ est unique à isotopie près, cet arbre est appelé l'arbre caractéristique de compagnonnage de K (cf. Bonahon, F., et Siebenmann, L.).

Chaque tore T_j de $\mathcal{T}$ correspond à un compagnon K_j de K, qui est l'âme du tore plein V_j bordé par T_j dans S^3. Ce tore plein contient K dans son intérieur car T_j est incompressible dans X.

Par définition, la complexité $c(K)$ du noeud K est égal au nombre d'éléments de la famille $\mathcal{T}$. Si $c(K)$ est nulle, K est le noeud trivial. Si $c(K) = 1$, K est un noeud simple au sens de Schubert (Schubert, H., 1953), c'est-à-dire un noeud torique ou hyperbolique d'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston (Thurston, W.P., (1982), (1980)).

La démonstration du théorème s'effectuera par récurrence sur la complexité $c(K)$ du noeud K.

Dans la démonstration du théorème nous serons particulièrement intéressés par la composante fermée X_0 de $X - \mathcal{T}$, dont le bord contient ∂X. La sous-famille $\mathcal{T}_0 = \{\partial X, T_1, \ldots, T_n\}$ de $\mathcal{T}$, telle que $\partial X \cup T_1 \cup \ldots \cup T_n = \partial X_0$, est elle-même unique à isotopie près. De plus, $X = X_0 \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$, où chaque variété Y_i, $1 \le i \le n$, est une composante connexe fermée de $X - X_0$ et s'identifie à l'extérieur du compagnon K_i de K, associé au tore incompressible non périphérique T_i plongé dans X. Ces tores T_i (ou ces compagnons K_i), $1 \le i \le n$, peuvent être considérés comme les tores incompressibles non périphériques (ou les compagnons) "les plus proches" au sens de Schubert (Schubert, H., 1953) de ∂X dans X (ou de K dans $S^3 - K$).

En particulier, on a la relation $\sum_{1}^{n} c(K_i) + 1 = c(K)$, d'où la complexité de chacun des compagnons K_i, les plus proches de K, est inférieure strictement à celle de K dès que $n \ge 1$. De plus, si l'un des noeuds K_i, $1 \le i \le n$, admet un compagnon pour lequel il a un nombre de tours nul, c'est aussi un compagnon de K pour lequel K a un nombre de tours nul, car tout compagnon de K_i est un compagnon de K et le nombre de tours se comporte multiplicativement par compagnonnage (cf. (Schubert, H., 1953) ou (Weber, C., 1980)).

Si on suppose que K n'admet pas de compagnon pour lequel il a un nombre de tours nul, cette propriété reste vraie pour les compagnons K_i de K. En particulier, si le noeud K n'est pas simple au sens de Schubert ($c(K) \ge 2$), l'hypothèse de récurrence pourra s'appliquer aux compagnons inversibles K_i les plus proches de K.

Dans le § 2 nous allons effectuer le premier pas de la démonstration par récurrence, en considérant le cas des noeuds simples au sens de Schubert, c'est-à-dire de complexité 1.

Dans la suite, nous utiliserons souvent le lemme suivant (cf. (Hartley, R., 1980)) :

Lemme.

Soit K un noeud tel qu'il existe un homéomorphisme h de degré $+1$ de l'extérieur X de K, dont la restriction à ∂X est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base de $H_1(\partial X; \mathbb{Z})$ formée d'un méridien et d'une longitude préférée de K. Alors K est inversible. De plus si h est une involution, K est rigidement inversible.

Rappel.

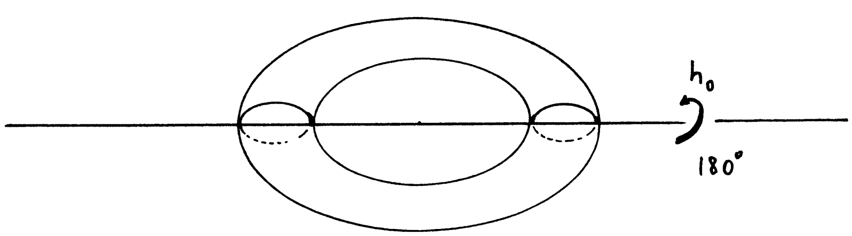
Un méridien de K est une courbe simple fermée m sur X qui est le bord d'un disque rencontrant K transversalement en un seul point. Une telle courbe m est unique à isotopie près sur ∂X.

Une longitude préférée de K est une courbe simple fermée ℓ sur ∂X qui rencontre un méridien de K transversalement en un seul point et qui est homologue à zéro dans X. Une telle courbe ℓ est unique à isotopie près sur ∂X.

Dans la suite m et ℓ sont supposés orientés de telle facon que l'intersection $m \cdot \ell = +1$.

Preuve du lemme.

La restriction de l'homéomorphisme h à ∂X est isotope à l'involution standard h_0 du tore ∂X, qui admet 4 points fixes, comme sur la figure :



Par une isotopie sur un collier $\partial X \times [0, \varepsilon]$ de ∂X, on se ramène au cas où la restriction de h à ∂X est h_0. On peut alors prolonger h au tore plein $N(K)$ par un homéomorphisme qui inverse K, car h_0 préserve un méridien de ∂X en renversant son orientation.

Si h est une involution, la classification des involutions du tore qui préservent homologiquement, au signe près, un méridien et une longitude préférée (cf. (Hartley, R., 1980)) montre que h est "fortement équivalente" à h_0 : il existe un homéomorphisme f de ∂X, isotope à l'identité, tel que $f h f^{-1} = h_0$. En utilisant cette isotopie on peut prolonger h en une involution de S^3, inversant K.

2. *Inversibilité des noeuds simples*

Nous allons montrer dans ce paragraphe que tout noeud simple est inversible si et seulement s'il est rigidement inversible.

D'après le théorème d'hyperbolisation de W.P. Thurston (1982), (1980) un noeud simple est torique (son complément porte une fibration de Seifert) ou hyperbolique (son complément porte une métrique hyperbolique, complète, à volume fini).

Il est bien connu que les noeuds toriques sont toujours rigidement inversibles : l'involution, inversant le noeud, est donnée par la conjugaison complexe, lorsqu'on définit le noeud torique de type (p, q) comme la trace sur la sphère unité de la singularité $z_1^p + z_2^q = 0$ dans C^2, p et q étant premiers entre eux.

On sait aussi (cf. Kawauchi, A., 1979) que les noeuds hyperboliques inversibles sont rigidement inversibles. Cependant nous aurons besoin, pour la suite de la démonstration, d'un résultat plus précis et plus général, qui puisse s'appliquer en particulier à la sous-variété X_0 de l'extérieur X de K lorsque K n'est plus un noeud simple (si K est simple $X = X_0$). C'est pourquoi nous donnons de ce résultat une démonstration géométrique, ne faisant pas appel à la conjecture de Smith comme dans (Kawauchi, A., 1979).

Proposition.

Soit K un noeud hyperbolique inversible. Tout homéomorphisme h du couple (S^3, K) de degré +1 dans S^3 et −1 sur K, est isotope à une involution de S^3, par une isotopie respectant K. En particulier K est rigidement inversible.

Demonstration.

Soit h un homéomorphisme du couple (S^3, K), de degré +1 dans S^3 et -1 sur K. On peut isotoper h dans $S^3 - K$ pour que h respecte un voisinage tubulaire $N(K)$ de K et fixe au moins un point x_0 sur $\partial N(K)$. Alors h induit sur le groupe $\pi_1(S^3 - K, x_0)$ un isomorphisme h_* tel que : $h_*(m) = m^{-1}$ et $h_*(\ell) = \ell^{-1}$, où le couple (m, ℓ) est un couple méridien, longitude préférée, du noeud K sur $N(K)$, passant par le point base x_0. (On a orienté m et ℓ pour que le nombre d'intersection $m \cdot \ell = +1$).

Puisque K est un noeud hyperbolique, le revêtement universel de $S^3 - K$ est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ et le groupe $\pi_1(S^3 - K, x_0)$ s'identifie à un sous-groupe discret, à volume fini, de $PSL_2(C)$. En particulier, au sous-groupe périphérique π, abélien de rang 2, engendré par m et ℓ, correspond des transformations paraboliques de $\mathbb{H}^3$ qui admettent un point fixe unique, commun, p_0 sur $\partial\bar{\mathbb{H}}^3$. ($\mathbb{H}^3$ est identifié à l'intérieur de la boule unité dans R^3.)

D'après le théorème de rigidité de Mostow (Mostow, G., 1968), l'isomorphisme h_* de $\pi_1(S^3 - K)$ peut être réalise géométriquement par conjugaison par une isométrie A de $\mathbb{H}^3$ telle que : $A m A^{-1} = m^{-1}$ et $A \ell A^{-1} = \ell^{-1}$.

Puisque $A(p_0)$ est fixé par les éléments du sous-groupe périphérique π, $A(p_0) = p_0$. L'isométrie A admet un autre point fixe p_1 sur $\partial\bar{\mathbb{H}}^3$, sinon A commuterait avec les éléments de π.

Par contre A^2 commute avec les éléments de π et fixe p_0 et p_1. Donc A^2 fixe tous les transformés de p_1 par les éléments de π et c'est l'identité, car A^2 fixe plus de deux points distincts sur $\partial\bar{H}^3$.

L'involution h_0 induite sur $S^3 - \mathring{N}(K)$ par A est isotope à h sur $S^3 - N(K)$ d'après Waldhausen (Waldhausen, F., 1968). La restriction de h_0 à $\partial N(K)$ qui envoie m sur m^{-1} et ℓ sur ℓ^{-1}, peut être prolongée en une involution h_0 de S^3 inversant K, d'après le lemme du § 1. Les homéomorphismes h et h_0 sont alors isotopes dans S^3 par une isotopie respectant K.

3. *Cas général.*

Dans ce paragraphe nous achevons par recurrence la démonstration du théorème :

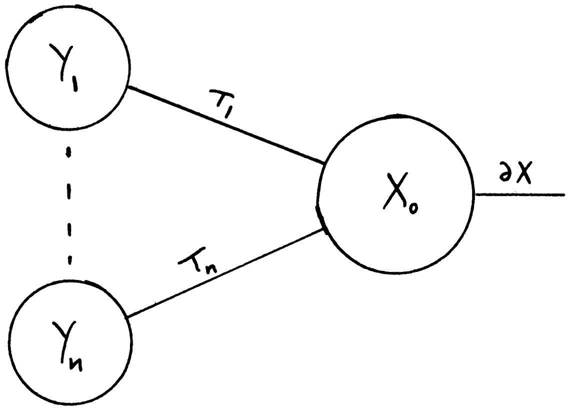
Théorème 1 .

Soit K un noeud inversible, n'ayant aucun compagnon pour lequel il a un nombre de tours nul. Alors, le noeud K est rigidement inversible.

Démonstration du théorème 1 .

Dans la proposition du § 2 , on a démontré le théorème dans le cas où $c(K) = 1$. On suppose, par recurrence, avoir démontré le théorème dans le cas où $c(K) = r$.

Soit K un noeud de complexité $c(K) = r+1$, vérifiant les hypothèses du théorème. D'après le § 1 , l'extérieur X de K est décomposé par une famille de tores incompressibles, non parallèles au bord, $T_1, \ldots, T_n$, en $X = X_0 \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$, où X_0 est une variété atoroidale et chaque Y_i $1 \leq i \leq n$, correspond à l'extérieur d'un compagnon K_i de K , parmi les plus proches de K au sens de Schubert (cf. figure).



On distingue alors deux cas :

1er cas . La sous-variété X_0 est anannulaire, c'est-à-dire porte une métrique hyperbolique, complète, à volume fini, d'après le théorème de Thurston (Thurston, W.P., (1982),(1980)).

Soit h un homéomorphisme du couple (S^3, K), qui est de degré +1 dans S^3 et -1 sur K. Puisque la famille des tores ∂X, $T_1, \ldots, T_n$ est unique à isotopie près dans $S^3 - K$, on peut supposer, après une isotopie respectant K, que h respecte la décomposition $X = X_0 \cup Y_i \cup \ldots \cup Y_n$ en permutant peut-être les composantes Y_i, $1 \leq i \leq n$.

Comme dans la démonstration de la proposition du § 2 on peut isotoper h dans S^3, de telle facon que la restriction de h à X_0 soit une involution. En effet, la démonstration ne tient pas compte du nombre de composantes de ∂X_0, mais du fait que la composante ∂X est respectée par h et que la restriction de h à ce tore est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'homéomorphisme h induit alors une permutation d'ordre 2 de la famille des tores $T_1, \ldots, T_n$; on distingue deux types de tores :

(a) les tores T_i tels que $h(T_i) \cap T_i = \emptyset$. Alors, il existe un unique tore T_j, $j \neq i$, tel que $h(T_i) = T_j$, et h échange les deux sous-variétés Y_i et Y_j. On remplace h sur $Y_i \amalg Y_j$ par h' qui est défini come suit :

sur Y_i, $h' = h$

sur Y_j, $h' = h^{-1}$.

Alors, h' est d'ordre 2 sur $Y_i \amalg Y_j$ et la restriction de h' à $\partial(Y_i \amalg Y_j)$ coïncide avec celle de h puisque h est déjà d'ordre 2 sur X_0.

(b) les tores T_i tels que $h(T_i) = T_i$. Alors h respecte la sous-variété Y_i. Le nombre de tours de K vis-à-vis de T_i étant *non nul*, h change homologiquement le signe d'un méridien m_i du tore plein V bordé par T_i. Comme h préserve l'orientation de S^3, h change homologiquement le signe d'une longitude préférée ℓ_i de T_i et la matrice de la restriction de h à $T_i = Y_i$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; d'après le lemme du § 1 le compagnon K_i de K, associè au tore T_i, est inversible.

Ainsi, les compagnons K_i de K, associés a ces tores T_i sont inversibles et vérifient les hypothèses du théorème. Comme $c(K_i) \leq r$, par hypothèse de récurrence K_i est rigidement inversible. Il existe donc une involution h' sur Y_i que l'on peut identifier sur ∂Y_i avec l'involution donnée par h (définie dans X_0), car les deux involutions sont fortement équivalentes sur T_i.

En utilisant (a) et (b), on peut construire, par recollement une involution h' sur X (coincidant avec h sur X_0) et dont la restriction à ∂X est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le noeud K est donc rigidement inversible d'après le lemme du § 1.

2e cas. La variété X_0 contient un anneau essentiel. X_0 est alors un espace fibré de Seifert. On en deduit aisément (cf. Jaco, W. et Shalen, P., 1979 ou Swarup, G.A., 1980) que K est soit un câble autour d'un noeud K_1 $(n = 1)$, soit la somme connexe de n noeuds, $K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$.

(c) K est un câble autour d'un noeud K_1. On a alors $0 < c(K_1) \leq r$, puisque K n'est pas un noeud simple. Comme dans la démonstration précédente, si K est inversible, K_1 est inversible, puisque le nombre de tours de K par rapport à K_1 est non nul. Donc, par hypothèse de récurrence, K_1 est rigidement inversible.

Or, tout câble d'un noeud rigidement inversible est lui-même rigidement inversible. Cela vient du fait qu'un noeud torique est rigidement inversible par une involution respectant le tore sur lequel on a placé le noeud torique (la conjugaison complexe respecte le tore $|z_1| = a$, $|z_2| = b$, $a > 0$ et $b > 0$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et $a^p = b^q$, sur lequel se trouve le noeud torique (p, q)).