

Cambridge University Press

978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives

Professees au Collège de France

Henri Leon Lebesgue

Frontmatter

[More information](#)

## CAMBRIDGE LIBRARY COLLECTION

*Books of enduring scholarly value*

### Mathematical Sciences

From its pre-historic roots in simple counting to the algorithms powering modern desktop computers, from the genius of Archimedes to the genius of Einstein, advances in mathematical understanding and numerical techniques have been directly responsible for creating the modern world as we know it. This series will provide a library of the most influential publications and writers on mathematics in its broadest sense. As such, it will show not only the deep roots from which modern science and technology have grown, but also the astonishing breadth of application of mathematical techniques in the humanities and social sciences, and in everyday life.

### **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France**

The two great works of the celebrated French mathematician Henri Lebesgue (1875–1941), *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France* (1904) and *Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France* (1906) arose from lecture courses he gave at the Collège de France while holding a teaching post at the University of Rennes. In 1901 Lebesgue formulated measure theory; and in 1902 his new definition of the definite integral, which generalised the Riemann integral, revolutionised integral calculus and greatly expanded the scope of Fourier analysis. The Lebesgue integral is regarded as one of the major achievements in modern real analysis, and is part of the standard university curriculum in mathematics today. Both of Lebesgue's books are reissued in this series.

Cambridge University Press  
978-1-108-00185-4 - Lecons Sur l'integration et la Recherche Des Fonctions Primitives  
Professees au College de France  
Henri Leon Lebesgue  
Frontmatter  
[More information](#)

---

Cambridge University Press has long been a pioneer in the reissuing of out-of-print titles from its own backlist, producing digital reprints of books that are still sought after by scholars and students but could not be reprinted economically using traditional technology. The Cambridge Library Collection extends this activity to a wider range of books which are still of importance to researchers and professionals, either for the source material they contain, or as landmarks in the history of their academic discipline.

Drawing from the world-renowned collections in the Cambridge University Library, and guided by the advice of experts in each subject area, Cambridge University Press is using state-of-the-art scanning machines in its own Printing House to capture the content of each book selected for inclusion. The files are processed to give a consistently clear, crisp image, and the books finished to the high quality standard for which the Press is recognised around the world. The latest print-on-demand technology ensures that the books will remain available indefinitely, and that orders for single or multiple copies can quickly be supplied.

The Cambridge Library Collection will bring back to life books of enduring scholarly value across a wide range of disciplines in the humanities and social sciences and in science and technology.

Cambridge University Press  
978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives  
Professées au Collège de France  
Henri Leon Lebesgue  
Frontmatter  
[More information](#)

---

Leçons sur l'intégration  
et la recherche des  
fonctions primitives  
professées au  
Collège de France

HENRI LEON LEBESGUE



Cambridge University Press  
978-1-108-00185-4 - Lecons Sur l'integration et la Recherche Des Fonctions Primitives  
Professeees au College de France  
Henri Leon Lebesgue  
Frontmatter  
[More information](#)

---

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge New York Melbourne Madrid Cape Town Singapore São Paulo Delhi

Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York

[www.cambridge.org](http://www.cambridge.org)

Information on this title: [www.cambridge.org/9781108001854](http://www.cambridge.org/9781108001854)

© in this compilation Cambridge University Press 2009

This edition first published 1904  
This digitally printed version 2009

ISBN 978-1-108-00185-4

This book reproduces the text of the original edition. The content and language reflect the beliefs, practices and terminology of their time, and have not been updated.

Cambridge University Press

978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives

Professees au College de France

Henri Leon Lebesgue

Frontmatter

[More information](#)

---

LEÇONS  
SUR L'INTÉGRATION  
ET LA  
RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES.

Cambridge University Press

978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives

Professees au Collège de France

Henri Leon Lebesgue

Frontmatter

[More information](#)

## LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,  
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

- Leçons sur la théorie des fonctions** (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par M. ÉMILE BOREL, 1898..... 3 fr. 50  
**Leçons sur les fonctions entières**, par M. ÉMILE BOREL, 1900..... 3 fr. 50  
**Leçons sur les séries divergentes**, par M. ÉMILE BOREL, 1901..... 4 fr. 50  
**Leçons sur les séries à termes positifs**, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL et rédigées par M. ROBERT D'ADHÉMAR, 1902..... 3 fr. 50  
**Leçons sur les fonctions méromorphes**, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL et rédigées par M. LUDOVIC ZORETTI, 1903. 3 fr. 50  
**Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE, 1904. 3 fr. 50

SOUS PRESSE :

- Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes**, professées à l'École Normale supérieure par M. ÉMILE BOREL et rédigées par M. MAURICE FRÉCHET, avec une Note de M. PAUL PAINLEVÉ.  
**Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions**, par M. ERNST LINDELÖF.

EN PRÉPARATION :

- Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes**, par M. PIERRE COUSIN.  
**Développements en séries de polynomes des fonctions analytiques**, par M. ÉMILE BOREL.  
**Leçons sur les fonctions discontinues**, par M. RENÉ BAIRE.  
**Leçons sur les Correspondances entre variables réelles**, par M. JULES DRACH.

Cambridge University Press  
978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives  
Professees au Collège de France  
Henri Leon Lebesgue  
Frontmatter  
[More information](#)

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,  
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

---

LEÇONS  
SUR L'INTÉGRATION

ET LA

RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES,

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

**Henri LEBESGUE,**

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.



PARIS,

**GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE**

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

(Tous droits réservés.)

Cambridge University Press

978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives

Professees au Collège de France

Henri Leon Lebesgue

Frontmatter

[More information](#)

---

## PRÉFACE.

---

J'ai réuni dans cet Ouvrage les Leçons que j'ai faites au Collège de France, pendant l'année scolaire 1902-1903, comme chargé du cours fondé par la famille Peccot.

Les vingt Leçons que comprend ce Cours ont été consacrées à l'étude du développement de la notion d'intégrale. Un historique complet n'aurait pu tenir en vingt Leçons; aussi, laissant de côté bien des résultats importants, je me suis tout d'abord limité à l'intégration des fonctions réelles d'une seule variable réelle; le lecteur pourra rechercher si les résultats indiqués se prêtent facilement à des généralisations. De plus, parmi les nombreuses définitions qui ont été successivement proposées pour l'intégrale des fonctions réelles d'une variable réelle, je n'ai retenu que celles qu'il est, à mon avis, indispensable de connaître pour bien comprendre toutes les transformations qu'a reçues le problème d'intégration et pour saisir les rapports qu'il y a entre la notion d'aire, si simple en apparence, et certaines définitions analytiques de l'intégrale à aspects très compliqués.

On peut se demander, il est vrai, s'il y a quelque intérêt à s'occuper de telles complications et s'il ne vaut pas mieux se borner à l'étude des fonctions qui ne nécessitent que des définitions simples. Cela n'a guère que des avantages quand il s'agit d'un Cours élémentaire; mais, comme on le verra dans ces Leçons, si l'on voulait toujours se limiter à la considération de ces bonnes fonctions, il faudrait renoncer à résoudre bien des problèmes à énoncés simples posés depuis



longtemps. C'est pour la résolution de ces problèmes, et non par amour des complications, que j'ai introduit dans ce Livre une définition de l'intégrale plus générale que celle de Riemann et comprenant celle-ci comme cas particulier.

Ceux qui me liront avec soin, tout en regrettant peut-être que les choses ne soient pas plus simples, m'accorderont, je le pense, que cette définition est nécessaire et naturelle. J'ose dire qu'elle est, en un certain sens, plus simple que celle de Riemann, aussi facile à saisir que celle-ci et que, seules, des habitudes d'esprit antérieurement acquises peuvent la faire paraître plus compliquée. Elle est plus simple parce qu'elle met en évidence les propriétés les plus importantes de l'intégrale, tandis que la définition de Riemann ne met en évidence qu'un procédé de calcul. C'est pour cela qu'il est presque toujours aussi facile, parfois même plus facile, à l'aide de la définition générale de l'intégrale, de démontrer une propriété pour toutes les fonctions auxquelles s'applique cette définition, c'est-à-dire pour toutes les fonctions *sommables*, que de la démontrer pour les seules fonctions intégrables, en s'appuyant sur la définition de Riemann. Même si l'on ne s'intéresse qu'aux résultats relatifs aux fonctions simples, il est donc utile de connaître la notion de fonction sommable parce qu'elle suggère des procédés rapides de démonstration.

Comme application de la définition de l'intégrale, j'ai étudié la recherche des fonctions primitives et la rectification des courbes. A ces deux applications j'aurais voulu en joindre une autre très importante: l'étude du développement trigonométrique des fonctions; mais, dans mon Cours, je n'ai pu donner à ce sujet que des indications tellement incomplètes que j'ai jugé inutile de les reproduire ici.

Suivant en cela l'exemple donné par M. Borel, j'ai rédigé ces Leçons sans supposer au lecteur d'autres connaissances

Cambridge University Press

978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives

Professees au College de France

Henri Leon Lebesgue

Frontmatter

[More information](#)

## PRÉFACE.

VII

que celles qui font partie du programme de licence de toutes les Facultés; je pourrais même dire que je ne suppose rien de plus que la connaissance de la définition et des propriétés les plus élémentaires de l'intégrale des fonctions continues. Mais, s'il n'est pas indispensable de connaître beaucoup de choses avant de lire ces Leçons, il est nécessaire d'avoir certaines habitudes d'esprit, il est utile de s'être déjà intéressé à certaines questions de la théorie des fonctions. Un lecteur parfaitement préparé serait celui qui aurait déjà lu l'*Introduction à l'étude des fonctions d'une variable réelle*, de M. Jules Tannery, et les *Leçons sur la théorie des fonctions*, de M. Emile Borel.

Si l'on compare ce Livre aux quelques pages que l'on consacre ordinairement à l'intégration et à la recherche des fonctions primitives, on le trouvera sans doute un peu long; j'espère cependant que tous ceux qui ont écrit sur la théorie des fonctions et qui savent les difficultés qu'il y a, en cette matière, à être à la fois rigoureux et court, ne s'étonneront pas trop de cette longueur; peut-être même me pardonneront-ils d'avoir été, à leur gré, parfois trop diffus, parfois trop concis.

Pour la rédaction, j'ai eu surtout recours aux Mémoires originaux; je dois cependant signaler, comme m'ayant été particulièrement utiles, outre les deux Ouvrages précédemment cités, les *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, de M. Ulisse Dini et le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, de M. Camille Jordan. Enfin j'ai à remercier M. Borel des conseils qu'il m'a donnés au cours de la correction des épreuves.

Rennes, le 3 décembre 1903.

HENRI LEBESGUE.

Cambridge University Press

978-1-108-00185-4 - Leçons Sur l'intégration et la Recherche Des Fonctions Primitives

Professees au College de France

Henri Leon Lebesgue

Frontmatter

[More information](#)

## INDEX.

CHAPITRE I. — L'intégrale avant Riemann.....	1
CHAPITRE II. — La définition de l'intégrale donnée par Riemann..	15
CHAPITRE III. — Définition géométrique de l'intégrale.....	36
CHAPITRE IV. — Les fonctions à variation bornée.....	49
CHAPITRE V. — La recherche des fonctions primitives.....	64
CHAPITRE VI. — L'intégrale définie à l'aide des fonctions primitives.	85
CHAPITRE VII. — Les fonctions sommables.....	98
NOTE.....	131
TABLE DES MATIÈRES.....	137